$\Leftarrow$: По теореме Хаусдорфа T_{k+1} нормально разрешим. Вновь апеллируя к 7.6.11 (2), выводим

$$(\operatorname{im} T_k)^\perp = \ker(T_k') = \operatorname{im}(T_{k+1}') = (\ker T_{k+1})^\perp.$$

Поскольку T_k нормально разрешим по теореме 7.6.12, то $\operatorname{im} T_k$ — замкнутое подпространство. Привлекая 7.5.14, получаем

$$\operatorname{im} T^k = {}^\perp((\operatorname{im} T_k)^\perp) = {}^\perp((\ker T_{k+1})^\perp) = \ker T_{k+1}.$$

Здесь учтено, что $\ker T_{k+1}$ — это тоже замкнутое подпространство. $\rhd$

7.6.14. *Следствие.* *Для каждого нормально разрешимого оператора T имеют место следующие изоморфизмы* $(\ker T)' \simeq \operatorname{coker}(T')$ *и* $(\operatorname{coker} T)' \simeq \ker(T')$.

$\lhd$ В силу 2.3.5 (6) последовательность

$$0 \to \ker T \to X \xrightarrow{T} Y \to \operatorname{coker} T \to 0$$

точна. Из 7.6.13 выводим, что последовательность

$$0 \to (\operatorname{coker} T)' \to Y' \xrightarrow{T'} X' \to (\ker T)' \to 0$$

точна. $\rhd$

7.6.15. *Следствие.* *T — изоморфизм $\Leftrightarrow$ T' — изоморфизм.* $\lhd\rhd$

7.6.16. *Следствие.* $\operatorname{Sp}(T) = \operatorname{Sp}(T')$. $\lhd\rhd$

Упражнения

7.1. Выяснить, какие линейные операторы идеальны.

7.2. Установить, что раздельно непрерывная билинейная форма на банаховом пространстве непрерывна по совокупности переменных.

7.3. Будет ли равномерно ограниченным на шаре семейство полунепрерывных снизу сублинейных функционалов на банаховом пространстве?

7.4. Пусть X, Y — банаховы пространства и $T : X \to Y$. Доказать, что для некоторого $t \in \mathbb{R}$ будет $\|Tx\|_Y \geq t\|x\|_X$ в том и только в том случае, если $\ker T = 0$ и $\operatorname{im} T$ — полное множество.

7.5. Выяснить условия нормальной разрешимости оператора умножения на функцию в пространстве непрерывных на компакте функций.

7.6. Пусть T — ограниченный эпиморфизм банахова пространства X на $l_1(\mathscr{E})$. Установить дополняемость $\ker T$.

7.7. Установить, что равномерно замкнутое подпространство в $C([a,\, b])$, составленное из непрерывно дифференцируемых функций — элементов $C^{(1)}([a,\, b])$, конечномерно.

7.8. Пусть X и Y — различные банаховы пространства, причем X непрерывно вложено в Y. Установить, что X является тощим множеством в Y.

7.9. Пусть $X_1,\ X_2$ — ненулевые замкнутые подпространства банахова пространства, причем $X_1 \cap X_2 = 0$. Доказать, что сумма $X_1 + X_2$ замкнута в том и только в том случае, если следующая величина

$$\inf\,\{\|x_1 - x_2\|/\|x_1\| :\ x_1 \neq 0,\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}$$

строго положительна.

7.10. Пусть (a_{mn}) — счетная двойная последовательность, обладающая тем свойством, что имеется последовательность $(x^{(m)})$ элементов l_1, для которой ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}x_n^{(m)}$ не сходятся (абсолютно). Доказать, что найдется последовательность x из l_1, для которой ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}x_n$ не сходятся (абсолютно) при всех $m \in \mathbb{N}$.

7.11. Пусть T — оператор в гильбертовом пространстве H такой, что равенство $\langle Tx \mid y\rangle = \langle x \mid Ty\rangle$ имеет место для всех $x,\ y \in H$. Установить ограниченность T.

7.12. Пусть замкнутый конус X^+ в банаховом пространстве X является воспроизводящим: $X = X^+ - X^+$. Доказать, что найдется константа $t > 0$ такая, что для любого $x \in X$ и представления $x = x_1 - x_2$, где $x_1,\ x_2 \in X^+$, выполнено: $\|x_1\| \leq t\|x\|,\ \|x_2\| \leq t\|x\|$.

7.13. Пусть полунепрерывные снизу сублинейные функционалы $p,\ q$ в банаховом пространстве X таковы, что конусы $\operatorname{dom} p$ и $\operatorname{dom} q$ замкнуты и подпространство $\operatorname{dom} p - \operatorname{dom} q = \operatorname{dom} q - \operatorname{dom} p$ дополняемо в X. Доказать, что для топологических субдифференциалов выполнено (ср. упражнение 3.10)

$$\partial(p+q) = \partial p + \partial q.$$

7.14. Пусть p — непрерывный сублинейный функционал, определенный на нормированном пространстве X, и T — непрерывный эндоморфизм X. Допустим, что сопряженный оператор T' переводит в себя субдифференциал ∂p. Установить, что ∂p содержит неподвижную точку T'.

7.15. Для функции $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ на нормированном пространстве X положим

$$f^*(x') := \sup\{\langle x \mid x'\rangle - f(x) :\ x \in \operatorname{dom} f\} \quad (x' \in X');$$

$$f^{**}(x) := \sup\{\langle x \mid x'\rangle - f^*(x') :\ x' \in \operatorname{dom}(f^*)\} \quad (x \in X).$$

Выяснить, при каких условиях на f выполнено $f = f^{**}$.

7.16. Установить, что l_∞ дополняемо в любом содержащем его банаховом пространстве.

7.17. Банахово пространство X называют примарным, если любое его бесконечномерное дополняемое подпространство изоморфно X. Убедиться, что c_0 и l_p $(1 \leq p \leq +\infty)$ примарны.

7.18. Пусть X и Y — банаховы пространства и оператор $T \in B(X,\ Y)$ таков, что $\operatorname{im} T$ — нетощее множество. Тогда T нормально разрешим.

7.19. Пусть X_0 — замкнутое подпространство нормированного пространства X, причем X_0 и X/X_0 — банаховы пространства. Тогда X также банахово пространство.