всех фредгольмовых операторов, действующих из X в Y. Критерий Никольского теперь можно переписать в следующей форме:

$$\mathscr{F}(X,\ Y) = \mathrm{Inv}(X,\ Y) + \mathscr{K}(X,\ Y).$$

Как видно из доказательства 8.5.22, можно утверждать также, что

$$\mathscr{F}(X,\ Y) = \mathrm{Inv}(X,\ Y) + F(X,\ Y),$$

где, как обычно, $F(X,\ Y)$ — подпространство конечномерных операторов в пространстве $B(X,\ Y)$. $\triangleleft\triangleright$

Упражнения

8.1. Изучить интеграл Рисса — Данфорда в конечномерном пространстве.

8.2. Описать ядро интеграла Рисса — Данфорда.

8.3. Пусть (f_n) — функции, голоморфные в окрестности U спектра оператора T. Доказать, что из равномерной сходимости (f_n) к нулю на U вытекает сходимость $(f_n(T))$ к нулю в операторной норме.

8.4. Пусть σ — изолированная часть спектра оператора T. Допустим, что часть $\sigma' := \mathrm{Sp}(T) \setminus \sigma$ отделяется от σ окружностью с центром в a и радиусом r таким образом, что $\sigma \subset \{z \in \mathbb{C} :\ |z-a| < r\}$. Доказать, что для проектора Рисса P_σ выполнено

$$P_\sigma = \lim_n\ (1 - z^{-n}(T-a)^n)^{-1};$$

$$x \in \mathrm{im}(P_\sigma) \Leftrightarrow \limsup_n \|(a-T)^n x\|^{\frac{1}{n}} < r.$$

8.5. Выяснить, при каких условиях компактен проектор.

8.6. Доказать, что каждое замкнутое подпространство, содержащееся в области значения компактного оператора в банаховом пространстве, конечномерно.

8.7. Доказать, что линейный оператор переводит каждое замкнутое линейное подпространство в замкнутое множество в том и только в том случае, если этот оператор нормально разрешим и его ядро конечномерно или коконечномерно (имеет конечномерное алгебраическое дополнение).

8.8. Пусть $1 \le p < r < +\infty$. Доказать, что каждый ограниченный оператор из l_r в l_p и из c_0 в l_p является компактным.

8.9. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Для оператора T из $B(H)$ и гильбертова базиса (e_n) норму Гильберта — Шмидта определяют соотношением

$$\|T\|_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2\right)^{1/2}.$$

(Проверить корректность!) Операторы с конечной нормой Гильберта — Шмидта называют ***операторами Гильберта — Шмидта.*** Установить, что оператор T является оператором Гильберта — Шмидта в том и только в том случае, если он компактен и при этом $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty$, где (λ_n) — собственные числа оператора $(T^*T)^{1/2}$.

8.10. Пусть T — некоторый эндоморфизм. Тогда

$$\operatorname{im}(T^0) \supset \operatorname{im}(T^1) \supset \operatorname{im}(T^2) \supset \dots .$$

Если существует номер n такой, что $\operatorname{im}(T^n) = \operatorname{im}(T^{n+1})$, то говорят, что T имеет ***конечный спуск.*** Наименьший номер n начала стабилизации называют спуском T и обозначают $d(T)$. Аналогично для ядер

$$\ker(T^0) \subset \ker(T^1) \subset \ker(T^2) \subset \dots$$

вводят понятие ***подъема*** и обозначение $a(T)$. Установить, что у оператора T с конечными спуском и подъемом величины $a(T)$ и $d(T)$ совпадают.

8.11. Оператор T называют ***оператором Рисса — Шаудера,*** если T нётеров и имеет конечные спуск и подъем. Доказать, что оператор T является оператором Рисса — Шаудера в том и только в том случае, если его можно представить в виде $T = U + V$, где U обратим, V конечномерен (или компактен) и коммутирует с U.

8.12. Пусть T — ограниченный эндоморфизм банахова пространства X с конечными спуском и подъемом $r := a(T) = d(T)$. Доказать, что подпространства $\operatorname{im}(T^r)$ и $\ker(T^r)$ замкнуты, разложение

$$X = \ker(T^r) \oplus \operatorname{im}(T^r)$$

приводит T и след оператора T на $\operatorname{im}(T^r)$ обратим.

8.13. Пусть T — нормально разрешимый оператор. Если конечна одна из величин

$$\alpha(T) := \dim \ker T, \quad \beta(T) := \dim \operatorname{coker} T,$$

то T называют ***полуфредгольмовым*** (реже ***полунётеровым***). Положим

$$\Phi_+(X) := \{T \in B(X) : \operatorname{im} T \in \operatorname{Cl}(X),\ \alpha(T) < +\infty\};$$

$$\Phi_-(X) := \{T \in B(X) : \operatorname{im} T \in \operatorname{Cl}(X),\ \beta(T) < +\infty\}.$$

Доказать, что

$$T \in \Phi_+(X) \Leftrightarrow T' \in \Phi_-(X');$$

$$T \in \Phi_-(X) \Leftrightarrow T' \in \Phi_+(X').$$

8.14. Пусть T — ограниченный эндоморфизм. Доказать, что T входит в $\Phi_+(X)$ в том и только в том случае, если для любого ограниченного, но не вполне ограниченного множества U его образ $T(U)$ не будет вполне ограниченным множеством в X.

8.15. Ограниченный эндоморфизм T банахова пространства называют *оператором Рисса*, если для каждого комплексного ненулевого λ оператор $(\lambda - T)$ нётеров. Доказать, что T является оператором Рисса в том и только в том случае, если для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ выполнено:

(а) оператор $(\lambda - T)$ имеет конечные спуск и подъем;
(б) ядро $(\lambda - T)^k$ конечномерно для каждого $k \in \mathbb{N}$;
(в) образ $(\lambda - T)^k$ имеет конечный дефект при $k \in \mathbb{N}$,

и, кроме того, ненулевые точки спектра T являются собственными числами, а нуль служит единственно возможной точкой накопления спектра T (= вне каждого круга с центром в нуле лежит конечное число точек спектра).

8.16. Установить изометрические изоморфизмы: $(X/Y)' \simeq Y^{\perp}$ и $X'/Y^{\perp} \simeq Y'$ для таких банаховых пространств X и Y, что Y вложено в X.

8.17. Доказать, что для нормального оператора T в гильбертовом пространстве и голоморфной функции $f \in H(\mathrm{Sp}(T))$ оператор $f(T)$ нормален.

8.18. Убедиться, что непрерывный эндоморфизм гильбертова пространства является оператором Рисса в том и только в том случае, если он представляет собой сумму компактного и квазинильпотентного операторов (квазинильпотентность означает тривиальность спектрального радиуса).

8.19. Пусть A, B — два фредгольмовых оператора в $B(X,\ Y)$. Если $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B$, то имеется жорданова дуга, соединяющая A и B в пространстве $B(X,\ Y)$.