Упражнения

9.1. Привести примеры предтопологических и топологических пространств и конструкции, к ним приводящие.

9.2. Можно ли задать топологию, указывая сходящиеся фильтры или последовательности?

9.3. Установить взаимные связи между топологиями и предпорядками на конечном множестве.

9.4. Описать топологические пространства, в которых объединение любого семейства замкнутых множеств замкнуто. Каковы непрерывные отображения таких пространств?

9.5. Пусть $(f_\xi : X \to (Y_\xi,\ \tau_\xi))_{\xi\in\Xi}$ — семейство отображений. Топологию σ в X назовем допустимой (в данной ситуации), если для любого топологического пространства $(Z,\ \omega)$ и произвольного отображения $g : Z \to X$ выполнено утверждение: $g : (Z,\ \omega) \to (X,\ \sigma)$ непрерывно в том и только в том случае, если непрерывно отображение $f_\xi \circ g$ $(\xi \in \Xi)$. Доказать, что слабейшая топология X, в которой непрерывны все f_ξ $(\xi \in \Xi)$, представляет собой сильнейшую допустимую (в данной ситуации) топологию.

9.6. Пусть $(f_\xi : (X_\xi,\ \sigma_\xi) \to Y)_{\xi\in\Xi}$ — семейство отображений. Топологию τ в Y назовем допустимой (в данной ситуации), если для любого топологического пространства $(Z,\ \omega)$ и произвольного отображения $g : Y \to Z$ выполнено утверждение: $g : (Y,\ \tau) \to (Z,\ \omega)$ непрерывно в том и только в том случае, если непрерывно отображение $g \circ f_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Доказать, что сильнейшая топология в Y, в которой непрерывны все f_ξ $(\xi \in \Xi)$, представляет собой слабейшую допустимую (в данной ситуации) топологию.

9.7. Доказать, что в тихоновском произведении произвольных топологических пространств замыкание произведения множеств, лежащих в сомножителях, есть произведение замыканий:

$$\operatorname{cl}\left(\prod_{\xi\in\Xi} A_\xi\right) = \prod_{\xi\in\Xi} \operatorname{cl} A_\xi.$$

9.8. Проверить, что тихоновское произведение хаусдорфово в том и только в том случае, если хаусдорфов каждый сомножитель.

9.9. Установить критерии компактности множеств в классических банаховых пространствах.

9.10. Хаусдорфово пространство X называют H-замкнутым, если X замкнуто в любом объемлющем X хаусдорфовом пространстве. Доказать, что регулярное H-замкнутое пространство компактно.

9.11. Изучить возможности компактификации топологического пространства.

9.12. Доказать, что тихоновское произведение несчетного числа прямых не является нормальным пространством.

9.13. Доказать, что каждая непрерывная функция на произведении компактных пространств в очевидном смысле (каком?) зависит от не более чем счетного числа координат.

9.14. Пусть A — компактное, а B — замкнутое множества в равномерном пространстве, причем $A \cap B = \varnothing$. Доказать, что для некоторого окружения V будет $V(A) \cap V(B) = \varnothing$.

9.15. Доказать, что пополнение (в соответствующем смысле) произведения равномерных пространств изоморфно произведению пополнений сомножителей.

9.16. Множество в отделимом равномерном пространстве назовем предкомпактным, если его пополнение компактно. Доказать, что множество является предкомпактным в том и только в том случае, если оно вполне ограничено.

9.17. Какие топологические пространства метризуемы?

9.18. Для равнометризуемого пространства описать сильнейшую равномерность, задающую исходную топологию.

9.19. Убедиться, что произведение паракомпактного и компактного пространств паракомпактно. Сохраняется ли паракомпактность при общих произведениях?