ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Обобщенные координаты

Одним из основных понятий механики является понятие *материальной точки*[1]). Под этим названием понимают тело, размерами которого можно пренебречь при описании его движения. Разумеется, возможность такого пренебрежения зависит от конкретных условий той или иной задачи. Так, планеты можно считать материальными точками при изучении их движения вокруг Солнца, но, конечно, не при рассмотрении их суточного вращения.

Положение материальной точки в пространстве определяется ее радиус-вектором $\mathbf{r}$, компоненты которого совпадают с ее декартовыми координатами x, y, z. Производная $\mathbf{r}$ по времени t

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

называется скоростью, а вторая производная $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ — ускорением точки. Ниже, как это принято, мы будем часто обозначать дифференцирование по времени точкой над буквой: $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}$.

Для определения положения системы из N материальных точек в пространстве надо задать N радиус-векторов, т. е. $3N$ координат. Вообще число независимых величин, задание которых необходимо для однозначного определения положения системы, называется числом ее *степеней свободы*; в данном случае это число равно $3N$. Эти величины не обязательно должны быть декартовыми координатами точек, и в зависимости от условий задачи может оказаться более удобным выбор каких-либо других координат. Любые s величин $q_1, q_2, \ldots, q_s$, вполне характеризующие положение системы (с s степенями свободы), называют ее *обобщенными координатами*, а производные $\dot{q}_i$ — ее *обобщенными скоростями*.

Задание значений обобщенных координат еще не определяет, однако, «механического состояния» системы в данный момент времени в том смысле, что оно не позволяет предсказать положение системы в последующие моменты времени. При задан-

[1]) Вместо термина «материальная точка» мы будем часто говорить о «частицах».

ных значениях координат система может обладать произвольными скоростями, а в зависимости от значения последних будет различным и положение системы в следующий момент времени (т. е. через бесконечно малый временной интервал dt).

Одновременное же задание всех координат и скоростей полностью определяет, как показывает опыт, состояние системы и позволяет в принципе предсказать дальнейшее ее движение. С математической точки зрения это значит, что заданием всех координат q и скоростей $\dot{q}$ в некоторый момент времени однозначно определяется также и значение ускорений $\ddot{q}$ в этот момент[1]).

Соотношения, связывающие ускорения с координатами и скоростями, называются *уравнениями движения*. По отношению к функциям $q(t)$ это — дифференциальные уравнения второго порядка, интегрирование которых позволяет в принципе определить эти функции, т. е. траектории движения механической системы.

§ 2. Принцип наименьшего действия

Наиболее общая формулировка закона движения механических систем дается так называемым *принципом наименьшего действия* (или *принципом Гамильтона*). Согласно этому принципу каждая механическая система характеризуется определенной функцией

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t)$$

или, в краткой записи, $L(q, \dot{q}, t)$, причем движение системы удовлетворяет следующему условию.

Пусть в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ система занимает определенные положения, характеризуемые двумя наборами значений координат $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$. Тогда между этими положениями система движется таким образом, чтобы интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{2,1}$$

имел наименьшее возможное значение[2]). Функция L называется *функцией Лагранжа* данной системы, а интеграл (2,1) — *действием*.

[1]) Для краткости обозначений мы будем часто условно понимать под q совокупность всех координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$ (и под $\dot{q}$ аналогично совокупность всех скоростей).

[2]) Следует, однако, указать, что в такой формулировке принцип наименьшего действия не всегда справедлив для всей траектории движения в целом, а лишь для каждого из достаточно малых ее участков; для всей же траектории может оказаться, что интеграл (2,1) имеет лишь экстремальное, не обязательно минимальное значение. Это обстоятельство, однако, совершенно не существенно при выводе уравнений движения, использующем лишь условие экстремальности.