вытекать существенная неопределенность: функции Лагранжа различных изолированных механических систем могли бы умножаться на любые различные постоянные. Свойство аддитивности устраняет эту неопределенность, — оно допускает лишь одновременное умножение лагранжевых функций всех систем на одинаковую постоянную, что сводится просто к естественному произволу в выборе единиц измерения этой физической величины; мы вернемся еще к этому вопросу в § 4.

Необходимо сделать еще следующее общее замечание. Рассмотрим две функции $L'(q, \dot{q}, t)$ и $L(q, \dot{q}, t)$, отличающиеся друг от друга на полную производную по времени от какой-либо функции координат и времени $f(q, t)$:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t). \tag{2,8}$$

Вычисленные с помощью этих двух функций интегралы (2,1) связаны соотношением

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt}\, dt = S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1),$$

т. е. отличаются друг от друга дополнительным членом, исчезающим при варьировании действия, так что условие $\delta S' = 0$ совпадает с условием $\delta S = 0$, и вид уравнений движения остается неизменным.

Таким образом, функция Лагранжа определена лишь с точностью до прибавления к ней полной производной от любой функции координат и времени.

§ 3. Принцип относительности Галилея

Для изучения механических явлений надо выбрать ту или иную *систему отсчета*. В различных системах отсчета законы движения имеют, вообще говоря, различный вид. Если взять произвольную систему отсчета, то может оказаться, что законы даже совсем простых явлений будут выглядеть в ней весьма сложно. Естественно, возникает задача отыскания такой системы отсчета, в которой законы механики выглядели бы наиболее просто.

По отношению к произвольной системе отсчета пространство является неоднородным и неизотропным. Это значит, что если какое-либо тело не взаимодействует ни с какими другими телами, то, тем не менее, его различные положения в пространстве и его различные ориентации в механическом отношении не эквивалентны. То же самое относится в общем случае и ко времени, которое будет неоднородным, т. е. его различные моменты неэквивалентными. Усложнение, которое вносили бы такие свойства пространства и времени в описание механических явлений, — очевидно. Так, например, свободное (т. е. не подвергающееся внешним воздействиям) тело не могло бы покоиться: если скорость тела в некоторый момент времени и равна нулю, то уже в следующий момент тело начало бы двигаться в некотором направлении.

Оказывается, однако, что всегда можно найти такую систему отсчета, по отношению к которой пространство является однородным и изотропным, а время — однородным. Такая система называется *инерциальной*. В ней, в частности, свободное тело, покоящееся в некоторый момент времени, остается в покое неограниченно долго.

Мы можем теперь сразу сделать некоторые заключения о виде функции Лагранжа свободно движущейся материальной точки в инерциальной системе отсчета. Однородность пространства и времени означает, что эта функция не может содержать явным образом ни радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки, ни времени t, т. е. L является функцией лишь от скорости $\mathbf{v}$. В силу же изотропии пространства функция Лагранжа не может зависеть также и от направления вектора $\mathbf{v}$, так что является функцией лишь от его абсолютной величины, т. е. от квадрата $\mathbf{v}^2 = v^2$:

$$L = L(v^2). \tag{3,1}$$

Ввиду независимости функции Лагранжа от $\mathbf{r}$ имеем $\dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0$, и потому уравнения Лагранжа имеют вид[1])

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

откуда $\dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathrm{const}$. Но поскольку $\dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ является функцией только от скорости, то отсюда следует, что и

$$\mathbf{v} = \mathrm{const}. \tag{3,2}$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что в инерциальной системе отсчета всякое свободное движение происходит с постоянной по величине и направлению скоростью. Это утверждение составляет содержание так называемого *закона инерции*.

Если наряду с имеющейся у нас инерциальной системой отсчета мы введем другую систему, движущуюся относительно первой прямолинейно и равномерно, то законы свободного движения по отношению к этой новой системе будут теми же, что

---

[1]) Под производной скалярной величины по вектору подразумевается вектор, компоненты которого равны производным от этой величины по соответствующим компонентам вектора.

и по отношению к первоначальной: свободное движение снова будет происходить с постоянной скоростью.

Опыт показывает, однако, что не только законы свободного движения будут одинаковыми в этих системах, но что они будут и во всех других механических отношениях полностью эквивалентными. Таким образом, существует не одна, а бесконечное множество инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно. Во всех этих системах свойства пространства и времени одинаковы и одинаковы все законы механики. Это утверждение составляет содержание так называемого *принципа относительности Галилея* — одного из важнейших принципов механики.

Все сказанное достаточно ясно свидетельствует об исключительности свойств инерциальных систем отсчета, в силу которых именно эти системы должны, как правило, использоваться при изучении механических явлений. Везде в дальнейшем, где обратное не оговорено особо, мы будем рассматривать только инерциальные системы отсчета.

Полная механическая эквивалентность всего бесчисленного множества таких систем показывает в то же время, что не существует никакой одной «абсолютной» системы отсчета, которую можно было бы предпочесть другим системам.

Координаты $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ одной и той же точки в двух различных системах отсчета K и K', из которых вторая движется относительно первой со скоростью $\mathbf{V}$, связаны друг с другом соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t. \tag{3,3}$$

При этом подразумевается, что ход времени одинаков в обеих системах отсчета:

$$t = t'. \tag{3,4}$$

Предположение об абсолютности времени лежит в самой основе представлений классической механики[1]).

Формулы (3,3), (3,4) называют *преобразованием Галилея*. Принцип относительности Галилея можно сформулировать как требование инвариантности уравнений движения механики по отношению к этому преобразованию.

§ 4. Функция Лагранжа свободной материальной точки

Переходя к определению вида функции Лагранжа, рассмотрим сначала простейший случай — свободное движение материальной точки относительно инерциальной системы отсчета. Как мы уже видели, функция Лагранжа в этом случае может зависеть лишь от квадрата вектора скорости. Для выяснения

---

[1]) Оно не справедливо в механике теории относительности.