и по отношению к первоначальной: свободное движение снова будет происходить с постоянной скоростью.

Опыт показывает, однако, что не только законы свободного движения будут одинаковыми в этих системах, но что они будут и во всех других механических отношениях полностью эквивалентными. Таким образом, существует не одна, а бесконечное множество инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно. Во всех этих системах свойства пространства и времени одинаковы и одинаковы все законы механики. Это утверждение составляет содержание так называемого *принципа относительности Галилея* — одного из важнейших принципов механики.

Все сказанное достаточно ясно свидетельствует об исключительности свойств инерциальных систем отсчета, в силу которых именно эти системы должны, как правило, использоваться при изучении механических явлений. Везде в дальнейшем, где обратное не оговорено особо, мы будем рассматривать только инерциальные системы отсчета.

Полная механическая эквивалентность всего бесчисленного множества таких систем показывает в то же время, что не существует никакой одной «абсолютной» системы отсчета, которую можно было бы предпочесть другим системам.

Координаты $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ одной и той же точки в двух различных системах отсчета K и K', из которых вторая движется относительно первой со скоростью $\mathbf{V}$, связаны друг с другом соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t. \tag{3,3}$$

При этом подразумевается, что ход времени одинаков в обеих системах отсчета:

$$t = t'. \tag{3,4}$$

Предположение об абсолютности времени лежит в самой основе представлений классической механики[1]).

Формулы (3,3), (3,4) называют *преобразованием Галилея*. Принцип относительности Галилея можно сформулировать как требование инвариантности уравнений движения механики по отношению к этому преобразованию.

§ 4. Функция Лагранжа свободной материальной точки

Переходя к определению вида функции Лагранжа, рассмотрим сначала простейший случай — свободное движение материальной точки относительно инерциальной системы отсчета. Как мы уже видели, функция Лагранжа в этом случае может зависеть лишь от квадрата вектора скорости. Для выяснения

[1]) Оно не справедливо в механике теории относительности.

вида этой зависимости воспользуемся принципом относительности Галилея. Если инерциальная система отсчета K движется относительно инерциальной системы отсчета K' с бесконечно малой скоростью $\boldsymbol{\varepsilon}$, то $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon}$. Так как уравнения движения во всех системах отсчета должны иметь один и тот же вид, то функция Лагранжа $L(v^2)$ должна при таком преобразовании перейти в функцию L', которая если и отличается от $L(v^2)$, то лишь на полную производную от функции координат и времени (см. конец § 2).

Имеем:

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\mathbf{v}\boldsymbol{\varepsilon} + \varepsilon^2).$$

Разлагая это выражение в ряд по степеням $\boldsymbol{\varepsilon}$ и пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, получим:

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\mathbf{v}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Второй член правой части этого равенства будет полной производной по времени только в том случае, если он зависит от скорости $\mathbf{v}$ линейно. Поэтому $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ от скорости не зависит, т. е. функция Лагранжа в рассматриваемом случае прямо пропорциональна квадрату скорости:

$$L = \frac{m}{2} v^2, \tag{4,1}$$

где m — постоянная.

Из того, что функция Лагранжа такого вида удовлетворяет принципу относительности Галилея в случае бесконечно малого преобразования скорости, непосредственно следует, что она удовлетворяет этому принципу и в случае конечной скорости $\mathbf{V}$ системы отсчета K относительно K'. Действительно,

$$L' = \frac{m}{2} v'^2 = \frac{m}{2} (\mathbf{v} + \mathbf{V})^2 = \frac{m}{2} v^2 + 2\frac{m}{2} \mathbf{v}\mathbf{V} + \frac{m}{2} V^2$$

или

$$L' = L + \frac{d}{dt}\left(2\frac{m}{2} \mathbf{r}\mathbf{V} + \frac{m}{2} V^2 t\right).$$

Второй член является полной производной и может быть опущен.

Величина m называется *массой* материальной точки. В силу свойства аддитивности функции Лагранжа, для системы невзаимодействующих точек имеем [1])

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} \tag{4,2}$$

---

[1]) В качестве индекса, указывающего номер частицы, мы будем пользоваться первыми буквами латинского алфавита, а для индексов, нумерующих координаты, используем буквы i, k, l, ...

Следует подчеркнуть, что лишь при учете этого свойства данное определение массы приобретает реальный смысл. Как уже было отмечено в § 2, всегда можно умножить функцию Лагранжа на любую постоянную; это не отражается на уравнениях движения. Для функции (4,2) такое умножение сводится к изменению единицы измерения массы; отношения же масс различных частиц, которые только и имеют реальный физический смысл, остаются при этом преобразовании неизменными.

Легко видеть, что масса не может быть отрицательной. В самом деле, согласно принципу наименьшего действия для действительного движения материальной точки из точки *1* пространства в точку *2* интеграл

$$S=\int_1^2 \frac{mv^2}{2}\,dt$$

имеет минимум. Если бы масса была отрицательной, то для траекторий, по которым частица сначала быстро удаляется от *1*, а затем быстро приближается к *2*, интеграл действия принимал бы сколь угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения, т. е. не имел бы минимума[1]).

Полезно заметить, что

$$v^2=\left(\frac{dl}{dt}\right)^2=\frac{dl^2}{dt^2}. \tag{4,3}$$

Поэтому для составления функции Лагранжа достаточно найти квадрат длины элемента дуги dl в соответствующей системе координат.

В декартовых координатах, например, $dl^2=dx^2+dy^2+dz^2$, поэтому

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2). \tag{4,4}$$

В цилиндрических $dl^2=dr^2+r^2\,d\varphi^2+dz^2$, откуда

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2). \tag{4,5}$$

В сферических $dl^2=dr^2+r^2\,d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2$ и

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2). \tag{4,6}$$

§ 5. Функция Лагранжа системы материальных точек

Рассмотрим теперь систему материальных точек, взаимодействующих друг с другом, но ни с какими посторонними телами; такую систему называют *замкнутой*. Оказывается, что

---

[1]) Сделанная в примечании на стр. 10 оговорка не мешает этому выводу, так как при $m<0$ интеграл не мог бы иметь минимума ни для какого малого участка траектории.