Следует подчеркнуть, что лишь при учете этого свойства данное определение массы приобретает реальный смысл. Как уже было отмечено в § 2, всегда можно умножить функцию Лагранжа на любую постоянную; это не отражается на уравнениях движения. Для функции (4,2) такое умножение сводится к изменению единицы измерения массы; отношения же масс различных частиц, которые только и имеют реальный физический смысл, остаются при этом преобразовании неизменными.

Легко видеть, что масса не может быть отрицательной. В самом деле, согласно принципу наименьшего действия для действительного движения материальной точки из точки *1* пространства в точку *2* интеграл

$$S=\int\limits_1^2 \frac{mv^2}{2}\,dt$$

имеет минимум. Если бы масса была отрицательной, то для траекторий, по которым частица сначала быстро удаляется от *1*, а затем быстро приближается к *2*, интеграл действия принимал бы сколь угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения, т. е. не имел бы минимума[1]).

Полезно заметить, что

$$v^2=\left(\frac{dl}{dt}\right)^2=\frac{dl^2}{dt^2}. \tag{4,3}$$

Поэтому для составления функции Лагранжа достаточно найти квадрат длины элемента дуги dl в соответствующей системе координат.

В декартовых координатах, например, $dl^2=dx^2+dy^2+dz^2$, поэтому

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2). \tag{4,4}$$

В цилиндрических $dl^2=dr^2+r^2\,d\varphi^2+dz^2$, откуда

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2). \tag{4,5}$$

В сферических $dl^2=dr^2+r^2\,d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2$ и

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2). \tag{4,6}$$

§ 5. Функция Лагранжа системы материальных точек

Рассмотрим теперь систему материальных точек, взаимодействующих друг с другом, но ни с какими посторонними телами; такую систему называют *замкнутой*. Оказывается, что

---

[1]) Сделанная в примечании на стр. 10 оговорка не мешает этому выводу, так как при $m<0$ интеграл не мог бы иметь минимума ни для какого малого участка траектории.

взаимодействие между материальными точками может быть описано прибавлением к функции Лагранжа невзаимодействующих точек (4,2) определенной (зависящей от характера взаимодействия) функции координат[1]). Обозначив эту функцию через $-U$, напишем:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots) \tag{5,1}$$

($\mathbf{r}_a$ — радиус-вектор a-й точки). Это есть общий вид функции Лагранжа замкнутой системы.

Сумму

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

называют *кинетической энергией*, а функцию U — *потенциальной энергией* системы; смысл этих названий выяснится в § 6.

Тот факт, что потенциальная энергия зависит только от расположения всех материальных точек в один и тот же момент времени, означает, что изменение положения одной из них мгновенно отражается на всех остальных; можно сказать, что взаимодействия «распространяются» мгновенно. Неизбежность такого характера взаимодействий в классической механике тесно связана с основными предпосылками последней — абсолютностью времени и принципом относительности Галилея. Если бы взаимодействие распространялось не мгновенно, т. е. с конечной скоростью, то эта скорость была бы различна в разных (движущихся друг относительно друга) системах отсчета, так как абсолютность времени автоматически означает применимость обычного правила сложения скоростей ко всем явлениям. Но тогда законы движения взаимодействующих тел были бы различны в разных (инерциальных) системах отсчета, что противоречило бы принципу относительности.

В § 3 мы говорили только об однородности времени. Вид функции Лагранжа (5,1) показывает, что время не только однородно, но и изотропно, т. е. его свойства одинаковы в обоих направлениях. В самом деле, замена t на $-t$ оставляет функцию Лагранжа, а следовательно, и уравнения движения неизменными. Другими словами, если в системе возможно некоторое движение, то всегда возможно и обратное движение, т. е. такое, при котором система проходит те же состояния в обратном порядке. В этом смысле все движения, происходящие по законам классической механики, обратимы.

---

[1]) Это утверждение относится к излагаемой в настоящей книге классической — нерелятивистской — механике.

Зная функцию Лагранжа, мы можем составить уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}. \tag{5,2}$$

Подставив сюда (5,1), получим:

$$m_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}. \tag{5,3}$$

Уравнения движения в этой форме называются *уравнениями Ньютона* и представляют собой основу механики системы взаимодействующих частиц. Вектор

$$\mathbf{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}, \tag{5,4}$$

стоящий в правой стороне уравнений (5,3), называется *силой*, действующей на a-ю точку. Вместе с U она зависит лишь от координат всех частиц, но не от их скоростей. Уравнения (5,3) показывают поэтому, что и векторы ускорения частиц являются функциями только от координат.

Потенциальная энергия есть величина, определяемая лишь с точностью до прибавления к ней произвольной постоянной; такое прибавление не изменило бы уравнений движения (частный случай указанной в конце § 2 неоднозначности функции Лагранжа). Наиболее естественный и обычно принятый способ выбора этой постоянной заключается в том, чтобы потенциальная энергия стремилась к нулю при увеличении расстояний между частицами.

Если для описания движения используются не декартовы координаты точек, а произвольные обобщенные координаты q_i, то для получения лагранжевой функции надо произвести соответствующее преобразование

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \ldots, q_s), \quad \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k}\dot{q}_k \text{ и т. д.}$$

Подставляя эти выражения в функцию

$$L = \frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U,$$

получим искомую функцию Лагранжа, которая будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\,\dot{q}_i\dot{q}_k - U(q), \tag{5,5}$$

где a_{ik} — функции только от координат. Кинетическая энергия в обобщенных координатах по-прежнему является квадратичной функцией скоростей, но может зависеть также и от координат.

До сих пор мы говорили только о замкнутых системах. Рассмотрим теперь незамкнутую систему A, взаимодействующую с другой системой B, совершающей заданное движение. В таком случае говорят, что система A движется в заданном внешнем поле (создаваемом системой B). Поскольку уравнения движения получаются из принципа наименьшего действия путем независимого варьирования каждой из координат (т. е. как бы считая остальные известными), мы можем для нахождения функции Лагранжа L_A системы A воспользоваться лагранжевой функцией L всей системы $A+B$, заменив в ней координаты q_B заданными функциями времени.

Предполагая систему $A+B$ замкнутой, будем иметь:

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B),$$

где первые два члена представляют собой кинетические энергии систем A и B, а третий член — их совместную потенциальную энергию. Подставив вместо q_B заданные функции времени и опустив член $T(q_B(t), \dot{q}_B(t))$, зависящий только от времени (и поэтому являющийся полной производной от некоторой другой функции времени), получим:

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)).$$

Таким образом, движение системы во внешнем поле описывается функцией Лагранжа обычного типа с тем лишь отличием, что теперь потенциальная энергия может зависеть от времени явно.

Так, для движения одной частицы во внешнем поле общий вид функции Лагранжа

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\mathbf{r}, t), \tag{5,6}$$

и уравнение движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \tag{5,7}$$

Однородным называют поле, во всех точках которого на частицу действует одна и та же сила $\mathbf{F}$. Потенциальная энергия в таком поле равна, очевидно:

$$U = -\mathbf{F}\mathbf{r}. \tag{5,8}$$

В заключение этого параграфа сделаем еще следующее замечание по поводу применения уравнений Лагранжа к различным конкретным задачам. Часто приходится иметь дело с такими механическими системами, в которых взаимодействие между телами (материальными точками) имеет, как говорят, характер *связей*, т. е. ограничений, налагаемых на взаимное расположение тел. Фактически такие связи осуществляются путем скрепления тел различными стержнями, нитями, шарнирами и т. п. Это обстоятельство вносит в движение новый фактор — движение тел сопровождается трением в местах их соприкосновения, в результате чего задача выходит, вообще говоря, за рамки чистой механики (см. § 25). Однако во многих случаях трение в системе оказывается настолько слабым, что его влиянием на движение можно полностью пренебречь. Если к тому же можно пренебречь массами «скрепляющих элементов» системы, то роль последних сведется просто к уменьшению числа степеней свободы системы s (по сравнению с числом $3N$). Для определения ее движения можно при этом снова пользоваться функцией Лагранжа вида (5,5) с числом независимых обобщенных координат, отвечающих фактическому числу степеней свободы.

Задачи

Найти функцию Лагранжа следующих систем, находящихся в однородном поле тяжести (ускорение силы тяжести g).

1. Двойной плоский маятник (рис. 1).

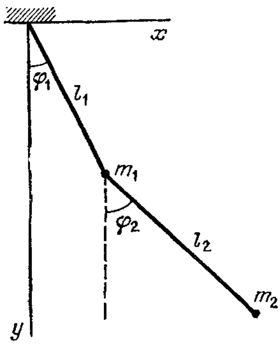

Рис. 1

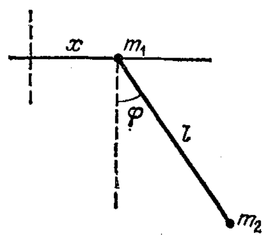

Рис. 2

Решение. В качестве координат берем углы φ_1 и φ_2, которые нити l_1 и l_2 образуют с вертикалью. Тогда для точки m_1 имеем:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \qquad U = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1.$$

Чтобы найти кинетическую энергию второй точки, выражаем ее декартовы координаты x_2, y_2 (начало координат в точке подвеса, ось y — по вертикали вниз) через углы φ_1, φ_2:

$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2, \qquad y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2.$$

После этого получим:

$$T_2 = \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \frac{m_2}{2}\left[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right].$$

Окончательно:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2.$$

2. Плоский маятник с массой m_2, точка подвеса которого (с массой m_1 в ней) может совершать движение по горизонтальной прямой (рис. 2).

Решение. Вводя координату x точки m_1 и угол φ между нитью маятника и вертикалью, получим:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) + m_2 g l \cos\varphi.$$

3. Плоский маятник, точка подвеса которого:

а) равномерно движется по вертикальной окружности с постоянной частотой γ (рис. 3);

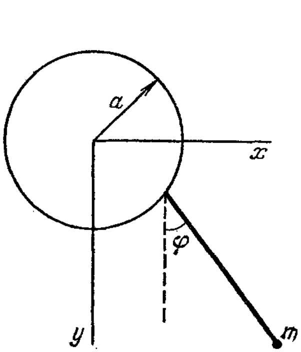

Рис. 3

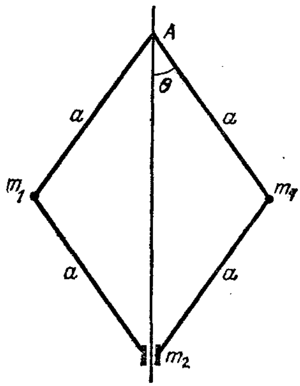

Рис. 4

б) совершает горизонтальные колебания по закону $a\cos\gamma t$;

в) совершает вертикальные колебания по закону $a\cos\gamma t$.

Решение. а) Координаты точки m:

$$x = a\cos\gamma t + l\sin\varphi, \quad y = -a\sin\gamma t + l\cos\varphi.$$

Функция Лагранжа

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \sin(\varphi - \gamma t) + mgl\cos\varphi;$$

здесь опущены члены, зависящие только от времени, и исключена полная производная по времени от $mal\gamma\cos(\varphi - \gamma t)$.

б) Координаты точки m:

$$x = a\cos\gamma t + l\sin\varphi, \quad y = l\cos\varphi.$$

Функция Лагранжа (после исключения полных производных)

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2\cos\gamma t\sin\varphi + mgl\cos\varphi.$$

в) Аналогичным образом

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \cos\gamma t \cos\varphi + mgl\cos\varphi.$$

4. Система, изображенная на рис. 4; точка m_2 движется по вертикальной оси, а вся система вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг этой оси.

Решение. Вводим угол θ между отрезком a и вертикалью и угол поворота φ всей системы вокруг оси вращения; $\dot{\varphi} = \Omega$. Для каждой из точек m_1 элемент перемещения $dl_1^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta d\varphi^2$. Для точки m_2 расстояние от точки подвеса A равно $2a\cos\theta$, и потому $dl_2 = -2a\sin\theta d\theta$. Функция Лагранжа

$$L = m_1 a^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2\theta) + 2m_2 a^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\theta}^2 + 2ga(m_1 + m_2)\cos\theta.$$