ГЛАВА II

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

§ 6. Энергия

При движении механической системы $2s$ величин q_i и $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, определяющих ее состояние, изменяются со временем. Существуют, однако, такие функции этих величин, которые сохраняют при движении постоянные значения, зависящие только от начальных условий. Эти функции называют *интегралами движения.*

Число независимых интегралов движения для замкнутой механической системы с s степенями свободы равно $2s - 1$. Это очевидно из следующих простых соображений. Общее решение уравнений движения содержит $2s$ произвольных постоянных (см. стр. 12). Поскольку уравнения движения замкнутой системы не содержат времени явно, то выбор начала отсчета времени совершенно произволен, и одна из произвольных постоянных в решении уравнений всегда может быть выбрана в виде аддитивной постоянной t_0 во времени. Исключив $t + t_0$ из $2s$ функций

$$q_i = q_i(t + t_0, C_1, C_2, \ldots, C_{2s-1}),$$
$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t + t_0, C_1, C_2, \ldots, C_{2s-1}),$$

мы выразим $2s - 1$ произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_{2s-1}$ в виде функций от q и $\dot{q}$, которые и будут интегралами движения.

Однако далеко не все интегралы движения играют одинаково важную роль в механике. Среди них есть несколько, постоянство которых имеет весьма глубокое происхождение, связанное с основными свойствами пространства и времени — их однородностью и изотропией. Все эти, как говорят, сохраняющиеся величины имеют важное общее свойство аддитивности — их значение для системы, состоящей из частей, взаимодействием которых можно пренебречь, равно сумме значений для каждой из частей в отдельности.

Именно свойство аддитивности придает соответствующим величинам особенно важную механическую роль. Предположим, например, что два тела взаимодействуют в течение некоторого времени. Поскольку как до, так и после взаимодействия каждый из аддитивных интегралов всей системы равен сумме их значений для обоих тел в отдельности, то законы сохранения этих величин сразу дают возможность сделать ряд заключений о состоянии тел после взаимодействия, если их состояния до взаимодействия известны.

Начнем с закона сохранения, возникающего в связи с *однородностью времени.*

В силу этой однородности лагранжева функция замкнутой системы не зависит явно от времени. Поэтому полная производная функции Лагранжа по времени может быть записана следующим образом:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

(если бы L зависела явно от времени, к правой стороне равенства добавился бы член $\frac{\partial L}{\partial t}$). Заменяя производные $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ согласно уравнениям Лагранжа на $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, получим:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0.$$

Отсюда видно, что величина

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \qquad (6,1)$$

остается неизменной при движении замкнутой системы, т. е. является одним из ее интегралов движения. Эта величина называется *энергией* системы. Аддитивность энергии непосредственно следует из аддитивности функции Лагранжа, через которую она выражается согласно (6,1) линейным образом.

Закон сохранения энергии справедлив не только для замкнутых систем, но и для систем, находящихся в постоянном (т. е. не зависящем от времени) внешнем поле: единственное использованное в приведенном выводе свойство функции Лагранжа — отсутствие явной зависимости от времени — имеется и в этом случае. Механические системы, энергия которых сохраняется, иногда называют *консервативными.*

Как мы видели в § 5, лагранжева функция замкнутой (или находящейся в постоянном поле) системы имеет вид

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q),$$

где T — квадратичная функция скоростей. Применяя к ней известную теорему Эйлера об однородных функциях, получим:

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

Подставляя это значение в (6,1), найдем:

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q); \tag{6,2}$$

в декартовых координатах

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots). \tag{6,3}$$

Таким образом, энергия системы может быть представлена в виде суммы двух существенно различных членов: кинетической энергии, зависящей от скоростей, и потенциальной энергии, зависящей только от координат частиц.

§ 7. Импульс

Другой закон сохранения возникает в связи с *однородностью пространства*.

В силу этой однородности механические свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого в пространстве. В соответствии с этим рассмотрим бесконечно малый перенос на отрезок $\boldsymbol{\varepsilon}$ и потребуем, чтобы функция Лагранжа осталась неизменной.

Параллельный перенос означает преобразование, при котором все точки системы смещаются на один и тот же постоянный вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$, т. е. их радиус-векторы $\mathbf{r}_a \to \mathbf{r}_a + \boldsymbol{\varepsilon}$. Изменение функции L в результате бесконечно малого изменения координат при неизменных скоростях частиц есть

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a = \boldsymbol{\varepsilon} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a},$$

где суммирование производится по всем материальным точкам системы. Ввиду произвольности $\boldsymbol{\varepsilon}$ требование $\delta L = 0$ эквивалентно требованию

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0. \tag{7,1}$$

В силу уравнений Лагранжа (5,2) получаем отсюда:

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0.$$