где T — квадратичная функция скоростей. Применяя к ней известную теорему Эйлера об однородных функциях, получим:

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

Подставляя это значение в (6,1), найдем:

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q); \tag{6,2}$$

в декартовых координатах

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots). \tag{6,3}$$

Таким образом, энергия системы может быть представлена в виде суммы двух существенно различных членов: кинетической энергии, зависящей от скоростей, и потенциальной энергии, зависящей только от координат частиц.

§ 7. Импульс

Другой закон сохранения возникает в связи с *однородностью пространства.*

В силу этой однородности механические свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого в пространстве. В соответствии с этим рассмотрим бесконечно малый перенос на отрезок $\boldsymbol{\varepsilon}$ и потребуем, чтобы функция Лагранжа осталась неизменной.

Параллельный перенос означает преобразование, при котором все точки системы смещаются на один и тот же постоянный вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$, т. е. их радиус-векторы $\mathbf{r}_a \to \mathbf{r}_a + \boldsymbol{\varepsilon}$. Изменение функции L в результате бесконечно малого изменения координат при неизменных скоростях частиц есть

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a = \boldsymbol{\varepsilon} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a},$$

где суммирование производится по всем материальным точкам системы. Ввиду произвольности $\boldsymbol{\varepsilon}$ требование $\delta L = 0$ эквивалентно требованию

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0. \tag{7,1}$$

В силу уравнений Лагранжа (5,2) получаем отсюда:

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что в замкнутой механической системе векторная величина

$$\mathbf{P}=\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \tag{7,2}$$

остается неизменной при движении. Вектор $\mathbf{P}$ называется *импульсом*[1]) системы. Дифференцируя функцию Лагранжа (5,1), найдем, что импульс следующим образом выражается через скорости точек:

$$\mathbf{P}=\sum_a m_a \mathbf{v}_a. \tag{7,3}$$

Аддитивность импульса очевидна. Более того, в отличие от энергии импульс системы равен сумме импульсов

$$\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a$$

отдельных частиц вне зависимости от возможности пренебрежения взаимодействием между ними.

Закон сохранения всех трех компонент вектора импульса имеет место лишь в отсутствие внешнего поля. Однако отдельные компоненты импульса могут сохраняться и при наличии поля, если потенциальная энергия в нем не зависит от какой-либо из декартовых координат. При переносе вдоль соответствующей координатной оси механические свойства системы, очевидно, не меняются, и тем же способом мы найдем, что проекция импульса на эту ось сохраняется. Так, в однородном поле, направленном вдоль оси z, сохраняются компоненты импульса вдоль осей x и y.

Исходное равенство (7,1) имеет простой физический смысл. Производная $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$ есть сила $\mathbf{F}_a$, действующая на a-ю частицу. Таким образом, равенство (7,1) означает, что сумма сил, действующих на все частицы замкнутой системы, равна нулю:

$$\sum_a \mathbf{F}_a = 0. \tag{7,4}$$

В частности, в случае системы, состоящей всего из двух материальных точек, $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$: сила, действующая на первую частицу со стороны второй, равна по величине, но противоположна по направлению силе, действующей на вторую частицу со стороны первой. Это утверждение известно под названием закона равенства действия и противодействия.

Если движение описывается обобщенными координатами q_i, то производные лагранжевой функции по обобщенным

[1]) Устаревшее название — количество движения.

скоростям

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{7,5}$$

называются *обобщенными импульсами*, а производные

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{7,6}$$

называются *обобщенными силами*. В этих обозначениях уравнения Лагранжа имеют вид

$$\dot{p}_i = F_i. \tag{7,7}$$

В декартовых координатах обобщенные импульсы совпадают с компонентами векторов $\mathbf{p}_a$. В общем же случае величины p_i являются линейными однородными функциями обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, отнюдь не сводящимися к произведениям массы на скорость.

Задача

Частица с массой m, движущаяся со скоростью $\mathbf{v}_1$, переходит из полупространства, в котором ее потенциальная энергия постоянна и равна U_1, в полупространство, где эта энергия тоже постоянна, но равна U_2. Определить изменение направления движения частицы.

Решение. Потенциальная энергия не зависит от координат вдоль осей, параллельных плоскости раздела между полупространствами. Поэтому сохраняется проекция импульса частицы на эту плоскость. Обозначая посредством θ_1 и θ_2 углы между нормалью к плоскости раздела и скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ частицы до и после перехода, получим: $v_1 \sin\theta_1 = v_2 \sin\theta_2$. Связь же между v_1 и v_2 дается законом сохранения энергии, и в результате находим:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2}(U_1 - U_2)}.$$

§ 8. Центр инерции

Импульс замкнутой механической системы имеет различные значения по отношению к различным (инерциальным) системам отсчета. Если система отсчета K' движется относительно системы отсчета K со скоростью $\mathbf{V}$, то скорости $\mathbf{v}'_a$ и $\mathbf{v}_a$ частиц по отношению к этим системам связаны соотношением $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$. Поэтому связь между значениями $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ импульса в этих системах дается формулой

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \mathbf{V} \sum_a m_a,$$

или

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V} \sum_a m_a. \tag{8,1}$$

В частности, всегда существует такая система отсчета K', в которой полный импульс обращается в нуль. Положив в (8,1)