скоростям

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{7,5}$$

называются *обобщенными импульсами*, а производные

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{7,6}$$

называются *обобщенными силами*. В этих обозначениях уравнения Лагранжа имеют вид

$$\dot{p}_i = F_i. \tag{7,7}$$

В декартовых координатах обобщенные импульсы совпадают с компонентами векторов $\mathbf{p}_a$. В общем же случае величины p_i являются линейными однородными функциями обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, отнюдь не сводящимися к произведениям массы на скорость.

Задача

Частица с массой m, движущаяся со скоростью $\mathbf{v}_1$, переходит из полупространства, в котором ее потенциальная энергия постоянна и равна U_1, в полупространство, где эта энергия тоже постоянна, но равна U_2. Определить изменение направления движения частицы.

Решение. Потенциальная энергия не зависит от координат вдоль осей, параллельных плоскости раздела между полупространствами. Поэтому сохраняется проекция импульса частицы на эту плоскость. Обозначая посредством θ_1 и θ_2 углы между нормалью к плоскости раздела и скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ частицы до и после перехода, получим: $v_1 \sin\theta_1 = v_2 \sin\theta_2$. Связь же между v_1 и v_2 дается законом сохранения энергии, и в результате находим:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2}(U_1 - U_2)}.$$

§ 8. Центр инерции

Импульс замкнутой механической системы имеет различные значения по отношению к различным (инерциальным) системам отсчета. Если система отсчета K' движется относительно системы отсчета K со скоростью $\mathbf{V}$, то скорости $\mathbf{v}'_a$ и $\mathbf{v}_a$ частиц по отношению к этим системам связаны соотношением $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$. Поэтому связь между значениями $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ импульса в этих системах дается формулой

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \mathbf{V} \sum_a m_a,$$

или

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V} \sum_a m_a. \tag{8,1}$$

В частности, всегда существует такая система отсчета K', в которой полный импульс обращается в нуль. Положив в (8,1)

$\mathbf{P}' = 0$, найдем, что скорость этой системы отсчета равна

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{\sum m_a} = \frac{\sum m_a \mathbf{v}_a}{\sum m_a}. \tag{8,2}$$

Если полный импульс механической системы равен нулю, то говорят, что она покоится относительно соответствующей системы отсчета. Это является вполне естественным обобщением понятия покоя отдельной материальной точки. Соответственно скорость $\mathbf{V}$, даваемая формулой (8,2), приобретает смысл скорости «движения как целого» механической системы с отличным от нуля импульсом. Мы видим, таким образом, что закон сохранения импульса позволяет естественным образом сформулировать понятия покоя и скорости механической системы как целого.

Формула (8,2) показывает, что связь между импульсом $\mathbf{P}$ и скоростью $\mathbf{V}$ системы как целого такая же, какая была бы между импульсом и скоростью одной материальной точки с массой $\mu = \sum m_a$, равной сумме масс всех частиц в системе. Это обстоятельство можно сформулировать как утверждение об *аддитивности массы*.

Правая сторона формулы (8,2) может быть представлена как полная производная по времени от выражения

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_a \mathbf{r}_a}{\sum m_a}. \tag{8,3}$$

Можно сказать, что скорость системы как целого есть скорость перемещения в пространстве точки, радиус-вектор которой дается формулой (8,3). Такую точку называют *центром инерции* системы.

Закон сохранения импульса замкнутой системы можно сформулировать как утверждение о том, что ее центр инерции движется прямолинейно и равномерно. В таком виде это есть обобщение закона инерции, который был выведен в § 3 для одной свободной материальной точки, «центр инерции» которой совпадает с ней самой.

При изучении механических свойств замкнутой системы естественно пользоваться той системой отсчета, в которой ее центр инерции покоится. Тем самым исключается из рассмотрения равномерное и прямолинейное движение системы как целого.

Энергию покоящейся как целое механической системы обычно называют ее *внутренней энергией* $E_{\text{вн}}$. Она включает в себя кинетическую энергию относительного движения частиц в системе и потенциальную энергию их взаимодействия. Полная же энергия системы, движущейся как целое со скоростью V, может быть представлена в виде:

$$E = \frac{\mu V^2}{2} + E_{\text{вн}}. \qquad (8,4)$$

Хотя эта формула довольно очевидна, дадим ее прямой вывод. Энергии E и E' механической системы в двух системах отсчета K и K' связаны соотношением

$$E = \frac{1}{2}\sum_a m_a v_a^2 + U = \frac{1}{2}\sum_a m_a (\mathbf{v}'_a + \mathbf{V})^2 + U =$$

$$= \frac{\mu V^2}{2} + \mathbf{V}\sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \sum_a \frac{m_a v_a'^2}{2} + U$$

или

$$E = E' + \mathbf{V}\mathbf{P}' + \frac{\mu V^2}{2}. \qquad (8,5)$$

Этой формулой определяется закон преобразования энергии при переходе от одной системы отсчета к другой, подобно тому как для импульса этот закон дается формулой (8,1). Если в системе K' центр инерции покоится, то $\mathbf{P}' = 0$, $E' = E_{\text{вн}}$, и мы возвращаемся к формуле (8,4).

Задача

Найти закон преобразования действия при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Решение. Функция Лагранжа, равная разности кинетической и потенциальной энергий, очевидно, преобразуется согласно формуле, аналогичной (8,5):

$$L = L' + \mathbf{V}\mathbf{P}' + {}^1\!/_2 \mu V^2.$$

Интегрируя это равенство по времени, найдем искомый закон преобразования действия:

$$S = S' + \mu \mathbf{V}\mathbf{R}' + {}^1\!/_2 \mu V^2 t,$$

где $\mathbf{R}'$ — радиус-вектор центра инерции в системе K'.

§ 9. Момент импульса

Перейдем к выводу закона сохранения, возникновение которого связано с *изотропией пространства.*

Эта изотропия означает, что механические свойства замкнутой системы не меняются при любом повороте системы как целого в пространстве. В соответствии с этим рассмотрим бесконечно малый поворот системы и потребуем, чтобы ее функция Лагранжа при этом не изменилась.

Введем вектор $\delta\boldsymbol{\varphi}$ бесконечно малого поворота, абсолютная величина которого равна углу $\delta\varphi$ поворота, а направление сов-