энергия системы, движущейся как целое со скоростью $V$, может быть представлена в виде:

$$E = \frac{\mu V^2}{2} + E_{\text{вн}}. \tag{8,4}$$

Хотя эта формула довольно очевидна, дадим ее прямой вывод. Энергии $E$ и $E'$ механической системы в двух системах отсчета $K$ и $K'$ связаны соотношением

$$E = \frac{1}{2}\sum_a m_a v_a^2 + U = \frac{1}{2}\sum_a m_a (\mathbf{v}'_a + \mathbf{V})^2 + U =$$
$$= \frac{\mu V^2}{2} + \mathbf{V}\sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \sum_a \frac{m_a v_a'^2}{2} + U$$

или

$$E = E' + \mathbf{V}\mathbf{P}' + \frac{\mu V^2}{2}. \tag{8,5}$$

Этой формулой определяется закон преобразования энергии при переходе от одной системы отсчета к другой, подобно тому как для импульса этот закон дается формулой (8,1). Если в системе $K'$ центр инерции покоится, то $\mathbf{P}' = 0$, $E' = E_{\text{вн}}$, и мы возвращаемся к формуле (8,4).

**Задача**

Найти закон преобразования действия при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Решение. Функция Лагранжа, равная разности кинетической и потенциальной энергий, очевидно, преобразуется согласно формуле, аналогичной (8,5):

$$L = L' + \mathbf{V}\mathbf{P}' + {}^1\!/_2\mu V^2.$$

Интегрируя это равенство по времени, найдем искомый закон преобразования действия:

$$S = S' + \mu\mathbf{V}\mathbf{R}' + {}^1\!/_2\mu V^2 t,$$

где $\mathbf{R}'$ — радиус-вектор центра инерции в системе $K'$.

## § 9. Момент импульса

Перейдем к выводу закона сохранения, возникновение которого связано с *изотропией пространства*.

Эта изотропия означает, что механические свойства замкнутой системы не меняются при любом повороте системы как целого в пространстве. В соответствии с этим рассмотрим бесконечно малый поворот системы и потребуем, чтобы ее функция Лагранжа при этом не изменилась.

Введем вектор $\delta\boldsymbol{\varphi}$ бесконечно малого поворота, абсолютная величина которого равна углу $\delta\varphi$ поворота, а направление совпадает с осью поворота (причем так, что направление поворота отвечает правилу винта по отношению к направлению $\delta\varphi$).

Найдем, прежде всего, чему равно при таком повороте приращение радиус-вектора, проведенного из общего начала координат (расположенного на оси вращения) к какой-либо из материальных точек поворачиваемой системы. Линейное перемещение конца радиус-вектора связано с углом соотношением

$$|\delta\mathbf{r}| = r\sin\theta\cdot\delta\varphi$$

(рис. 5). Направление же вектора перпендикулярно к плоскости, проходящей через $\mathbf{r}$ и $\delta\boldsymbol{\varphi}$. Поэтому ясно, что

$$\delta\mathbf{r} = [\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{r}]. \tag{9,1}$$

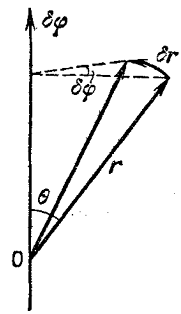

Рис. 5

При повороте системы меняется направление не только радиус-векторов, но и скоростей всех частиц, причем все векторы преобразуются по одинаковому закону. Поэтому приращение скорости относительно неподвижной системы координат

$$\delta\mathbf{v} = [\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{v}]. \tag{9,2}$$

Подставив эти выражения в условие неизменяемости функции Лагранжа при повороте

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}\delta\mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}\delta\mathbf{v}_a\right) = 0,$$

заменяем производные $\partial L/\partial\mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a$, $\partial L/\partial\mathbf{r}_a = \dot{\mathbf{p}}_a$:

$$\sum_a (\dot{\mathbf{p}}_a[\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{r}_a] + \mathbf{p}_a[\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{v}_a]) = 0,$$

или, производя циклическую перестановку множителей и вынося $\delta\boldsymbol{\varphi}$ за знак суммы:

$$\delta\boldsymbol{\varphi}\sum_a([\mathbf{r}_a\dot{\mathbf{p}}_a] + [\mathbf{v}_a\mathbf{p}_a]) = \delta\boldsymbol{\varphi}\frac{d}{dt}\sum_a[\mathbf{r}_a\mathbf{p}_a] = 0.$$

Ввиду произвольности $\delta\boldsymbol{\varphi}$ отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt}\sum_a[\mathbf{r}_a\mathbf{p}_a] = 0,$$

т. е. мы приходим к выводу, что при движении замкнутой системы сохраняется векторная величина

$$\mathbf{M} = \sum_a[\mathbf{r}_a\mathbf{p}_a], \tag{9,3}$$

называемая *моментом импульса* (или просто *моментом*) системы[1]). Аддитивность этой величины очевидна, причем, как и у импульса, она не зависит от наличия или отсутствия взаимодействия между частицами.

Этим исчерпываются аддитивные интегралы движения. Таким образом, всякая замкнутая система имеет всего семь таких интегралов: энергия и по три компоненты векторов импульса и момента.

Поскольку в определение момента входят радиус-векторы частиц, то его значение, вообще говоря, зависит от выбора начала координат. Радиус-векторы $\mathbf{r}_a$ и $\mathbf{r}'_a$ одной и той же точки по отношению к началам координат, смещенным на вектор $\mathbf{a}$, связаны соотношением $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{a}$. Поэтому имеем:

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a\mathbf{p}_a] = \sum_a [\mathbf{r}'_a\mathbf{p}_a] + \left[\mathbf{a}\sum_a \mathbf{p}_a\right]$$

или

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{a}\mathbf{P}]. \tag{9,4}$$

Из этой формулы видно, что только в том случае, когда система как целое покоится (т. е. $\mathbf{P} = 0$), ее момент не зависит от выбора начала координат. На законе сохранения момента эта неопределенность его значения, разумеется, не сказывается, так как у замкнутой системы импульс тоже сохраняется.

Выведем также формулу, связывающую значения момента импульса в двух различных инерциальных системах отсчета $K$ и $K'$, из которых вторая движется относительно первой со скоростью $\mathbf{V}$. Будем считать, что начала координат в системах $K$ и $K'$ в данный момент времени совпадают. Тогда радиус-векторы частиц в обеих системах одинаковы, скорости же связаны посредством $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$. Поэтому имеем:

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a\mathbf{v}_a] = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a\mathbf{v}'_a] + \sum_a m_a [\mathbf{r}_a\mathbf{V}].$$

Первая сумма в правой стороне равенства есть момент $\mathbf{M}'$ в системе $K'$; введя во вторую сумму радиус-вектор центра инерции согласно (8,3), получаем:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mu[\mathbf{R}\mathbf{V}]. \tag{9,5}$$

Эта формула определяет закон преобразования момента импульса при переходе от одной системы отсчета к другой, подобно тому, как для импульса и энергии аналогичные законы даются формулами (8,1) и (8,5).

Если система отсчета $K'$ есть та, в которой данная механическая система покоится как целое, то $\mathbf{V}$ есть скорость центра инерции последней, а $\mu\mathbf{V}$ — ее полный импульс $\mathbf{P}$ (относительно $K$).

---

[1]) Употребляются также названия *вращательный момент* или *угловой момент*.

Тогда

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{RP}]. \tag{9,6}$$

Другими словами, момент импульса $\mathbf{M}$ механической системы складывается из ее «собственного момента» относительно системы отсчета, в которой она покоится, и момента $[\mathbf{RP}]$, связанного с ее движением как целого.

Хотя закон сохранения всех трех компонент момента (относительно произвольного начала координат) имеет место только для замкнутой системы, в более ограниченном виде этот закон может иметь место и для систем, находящихся во внешнем поле. Из приведенного выше вывода очевидно, что всегда сохраняется проекция момента на такую ось, относительно которой данное поле симметрично, и потому механические свойства системы не меняются при любом повороте вокруг этой оси; при этом, конечно, момент должен быть определен относительно какой-нибудь точки (начала координат), лежащей на этой же оси.

Наиболее важным случаем такого рода является поле с центральной симметрией, т. е. поле, в котором потенциальная энергия зависит только от расстояния до некоторой определенной точки (центра) в пространстве. Очевидно, что при движении в таком поле сохраняется проекция момента на любую ось, проходящую через центр. Другими словами, сохраняется вектор $\mathbf{M}$ момента, но определенного не относительно произвольной точки пространства, а относительно центра поля.

Другой пример: однородное поле вдоль оси $z$, в котором сохраняется проекция $M_z$ момента, причем начало координат может быть выбрано произвольным образом.

Отметим, что проекция момента на какую-либо ось (назовем ее $z$) может быть найдена дифференцированием функции Лагранжа по формуле

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a}, \tag{9,7}$$

где координата $\varphi$ есть угол поворота вокруг оси $z$. Это ясно уже из характера изложенного выше вывода закона сохранения момента, но в том же можно убедиться и прямым вычислением. В цилиндрических координатах $r$, $\varphi$, $z$ имеем (подставляя $x_a = r_a \cos\varphi_a$, $y_a = r_a \sin\varphi_a$):

$$M_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a) = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\varphi}_a. \tag{9,8}$$

С другой стороны, функция Лагранжа в этих переменных имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\varphi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

и ее подстановка в (9,7) приводит к тому же выражению (9,8).

Задачи.

1. Найти выражения для декартовых компонент и абсолютной величины момента импульса частицы в цилиндрических координатах $r$, $\varphi$, $z$.

Ответ:

$$M_x = m\sin\varphi\,(r\dot{z} - z\dot{r}) - mrz\dot{\varphi}\cos\varphi,$$
$$M_y = m\cos\varphi\,(z\dot{r} - r\dot{z}) - mrz\dot{\varphi}\sin\varphi,$$
$$M_z = mr^2\dot{\varphi},$$
$$M^2 = m^2r^2\dot{\varphi}^2(r^2 + z^2) + m^2(r\dot{z} - z\dot{r})^2.$$

2. То же в сферических координатах $r$, $\theta$, $\varphi$.

Ответ:

$$M_x = -mr^2(\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi),$$
$$M_y = mr^2(\dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi),$$
$$M_z = mr^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi},$$
$$M^2 = m^2r^4(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2).$$

3. Какие компоненты импульса $\mathbf{P}$ и момента $\mathbf{M}$ сохраняются при движении в следующих полях:

а) поле бесконечной однородной плоскости.

Ответ: $P_x$, $P_y$, $M_z$ (бесконечная плоскость — плоскость $x$, $y$).

б) Поле бесконечного однородного цилиндра.

Ответ: $M_z$, $P_z$ (ось цилиндра — ось $z$).

в) Поле бесконечной однородной призмы.

Ответ: $P_z$ (ребра призмы параллельны оси $z$).

г) Поле двух точек.

Ответ: $M_z$ (точки находятся на оси $z$).

д) Поле бесконечной однородной полуплоскости.

Ответ: $P_y$ (бесконечная полуплоскость — часть плоскости $x$, $y$, ограниченная осью $y$).

е) Поле однородного конуса.

Ответ: $M_z$ (ось конуса — ось $z$).

ж) Поле однородного кругового тора.

Ответ: $M_z$ (ось тора — ось $z$).

з) Поле бесконечной однородной цилиндрической винтовой линии.

Решение. Функция Лагранжа не меняется при повороте вокруг оси винта (ось $z$) на угол $\delta\varphi$ и одновременном переносе вдоль этой оси на расстояние $\frac{h}{2\pi}\delta\varphi$ ($h$ — шаг винта). Поэтому

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial \varphi}\delta\varphi = \left(\dot{P}_z\frac{h}{2\pi} + \dot{M}_z\right)\delta\varphi = 0,$$

откуда

$$M_z + \frac{h}{2\pi}P_z = \text{const}.$$

## § 10. Механическое подобие

Умножение функции Лагранжа на любой постоянный множитель очевидным образом не меняет уравнений движения. Это обстоятельство (отмеченное уже в § 2) дает возможность в ряде важных случаев сделать некоторые существенные заклю-