Задачи

1. Найти выражения для декартовых компонент и абсолютной величины момента импульса частицы в цилиндрических координатах r, φ, z.

Ответ:

$$M_x = m\sin\varphi\,(r\dot z - z\dot r) - mrz\dot\varphi\cos\varphi,$$
$$M_y = m\cos\varphi\,(z\dot r - r\dot z) - mrz\dot\varphi\sin\varphi,$$
$$M_z = mr^2\dot\varphi,$$
$$M^2 = m^2r^2\dot\varphi^2(r^2+z^2) + m^2(r\dot z - z\dot r)^2.$$

2. То же в сферических координатах r, θ, φ.

Ответ:

$$M_x = -mr^2(\dot\theta\sin\varphi + \dot\varphi\sin\theta\cos\theta\cos\varphi),$$
$$M_y = mr^2(\dot\theta\cos\varphi - \dot\varphi\sin\theta\cos\theta\sin\varphi),$$
$$M_z = mr^2\sin^2\theta\cdot\dot\varphi,$$
$$M^2 = m^2r^4(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\cdot\dot\varphi^2).$$

3. Какие компоненты импульса $\mathbf{P}$ и момента $\mathbf{M}$ сохраняются при движении в следующих полях:

а) поле бесконечной однородной плоскости.

Ответ: P_x, P_y, M_z (бесконечная плоскость — плоскость x, y).

б) Поле бесконечного однородного цилиндра.

Ответ: M_z, P_z (ось цилиндра — ось z).

в) Поле бесконечной однородной призмы.

Ответ: P_z (ребра призмы параллельны оси z).

г) Поле двух точек.

Ответ: M_z (точки находятся на оси z).

д) Поле бесконечной однородной полуплоскости.

Ответ: P_y (бесконечная полуплоскость — часть плоскости x, y, ограниченная осью y).

е) Поле однородного конуса.

Ответ: M_z (ось конуса — ось z).

ж) Поле однородного кругового тора.

Ответ: M_z (ось тора — ось z).

з) Поле бесконечной однородной цилиндрической винтовой линии.

Решение. Функция Лагранжа не меняется при повороте вокруг оси винта (ось z) на угол $\delta\varphi$ и одновременном переносе вдоль этой оси на расстояние $\frac{h}{2\pi}\delta\varphi$ (h — шаг винта). Поэтому

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial\varphi}\delta\varphi = \left(\dot P_z\frac{h}{2\pi} + \dot M_z\right)\delta\varphi = 0,$$

откуда

$$M_z + \frac{h}{2\pi}P_z = \text{const}.$$

§ 10. Механическое подобие

Умножение функции Лагранжа на любой постоянный множитель очевидным образом не меняет уравнений движения. Это обстоятельство (отмеченное уже в § 2) дает возможность в ряде важных случаев сделать некоторые существенные заключения о свойствах движения, не производя конкретного интегрирования уравнений движения.

Сюда относятся случаи, когда потенциальная энергия является однородной функцией координат, т. е. функцией, удовлетворяющей условию

$$U(\alpha\mathbf{r}_1, \alpha\mathbf{r}_2, \ldots, \alpha\mathbf{r}_n) = \alpha^k U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n), \tag{10,1}$$

где α — любая постоянная, а число k — степень однородности функции.

Произведем преобразование, при котором наряду с изменением всех координат в α раз одновременно изменяется (в β раз) время:

$$\mathbf{r}_a \to \alpha\mathbf{r}_a, \quad t \to \beta t.$$

Все скорости $\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{r}_a}{dt}$ изменяются при этом в α/β раз, а кинетическая энергия — в α^2/β^2 раз. Потенциальная же энергия умножается на α^k. Если связать α и β условием

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k, \text{ т. е. } \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}},$$

то в результате такого преобразования функция Лагранжа целиком умножится на постоянный множитель α^k, т. е. уравнения движения останутся неизменными.

Изменение всех координат частиц в одинаковое число раз означает переход от одних траекторий к другим, геометрически подобным первым и отличающимся от них лишь своими линейными размерами. Таким образом, мы приходим к заключению, что если потенциальная энергия системы является однородной функцией k-й степени от координат (декартовых), то уравнения движения допускают геометрически подобные траектории, причем все времена движения (между соответственными точками траекторий) относятся, как

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}, \tag{10,2}$$

где l'/l — отношение линейных размеров двух траекторий. Вместе с временами определенными степенями отношения l'/l являются также значения любых механических величин в соответственных точках траекторий в соответственные моменты времени. Так, для скоростей, энергии и момента имеем:

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}}, \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k}, \quad \frac{M'}{M} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{k}{2}}. \tag{10,3}$$

Приведем для иллюстрации несколько примеров.

Как мы увидим далее, в случае так называемых малых колебаний потенциальная энергия является квадратичной функцией координат ($k=2$). Из (10,2) находим, что период таких колебаний не зависит от их амплитуды.

В однородном силовом поле потенциальная энергия — линейная функция координат (см. (5,8)), т. е. $k=1$. Из (10,2) имеем

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{l'}{l}}.$$

Отсюда следует, например, что при падении в поле тяжести квадраты времени падения тел относятся, как их начальные высоты.

При ньютоновском притяжении двух масс или кулоновском взаимодействии двух зарядов потенциальная энергия обратно пропорциональна расстоянию между частицами, т. е. является однородной функцией степени $k=-1$. В этих случаях

$$\frac{t'}{t}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2},$$

и мы можем утверждать, например, что квадраты времен обращения по орбитам пропорциональны кубам их размеров (так называемый *третий закон Кеплера*).

Если движение системы, потенциальная энергия которой является однородной функцией координат, происходит в ограниченной области пространства, существует весьма простое соотношение между средними по времени значениями кинетической и потенциальной энергии; оно известно под названием *вириальной теоремы*.

Поскольку кинетическая энергия T является квадратичной функцией скоростей, то по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a}\mathbf{v}_a=2T,$$

или, вводя импульсы $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a}=\mathbf{p}_a$:

$$2T=\sum_a \mathbf{p}_a\mathbf{v}_a=\frac{d}{dt}\left(\sum_a \mathbf{p}_a\mathbf{r}_a\right)-\sum_a \mathbf{r}_a\dot{\mathbf{p}}_a. \qquad (10,4)$$

Усредним это равенство по времени. Средним значением какой-либо функции времени $f(t)$ называется величина

$$\bar{f}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)\,dt.$$

Легко видеть, что если $f(t)$ является производной по времени $f(t)=\frac{dF(t)}{dt}$ от ограниченной (т. е. не принимающей бесконечных значений) функции $F(t)$, то ее среднее значение обращается в нуль. Действительно,

$$\bar{f}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dF}{dt}\,dt=\lim_{\tau\to\infty}\frac{F(\tau)-F(0)}{\tau}=0.$$

Предположим, что система совершает движение в конечной области пространства и со скоростями, не обращающимися в бесконечность. Тогда величина $\sum \mathbf{r}_a\mathbf{p}_a$ ограничена, и среднее значение первого члена в правой стороне равенства (10,4) обращается в нуль. Во втором же заменяем $\dot{\mathbf{p}}_a$ согласно уравнениям Ньютона на $-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$ и получаем [1]:

$$2\bar{T}=\overline{\sum_a \mathbf{r}_a\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}}. \tag{10,5}$$

Если потенциальная энергия является однородной функцией k-й степени от всех радиус-векторов $\mathbf{r}_a$, то согласно теореме Эйлера равенство (10,5) переходит в искомое соотношение

$$2\bar{T}=k\bar{U}. \tag{10,6}$$

Поскольку $\bar{T}+\bar{U}=\bar{E}=E$, соотношение (10,6) можно представить в эквивалентных формах

$$\bar{U}=\frac{2}{k+2}E,\quad \bar{T}=\frac{k}{k+2}E, \tag{10,7}$$

выражающих $\bar{U}$ и $\bar{T}$ через полную энергию системы.

В частности, для малых колебаний ($k=2$) имеем:

$$\bar{T}=\bar{U},$$

т. е. средние значения кинетической и потенциальной энергий совпадают. Для ньютоновского взаимодействия ($k=-1$)

$$2\bar{T}=-\bar{U}.$$

При этом $E=-\bar{T}$ в соответствии с тем, что при таком взаимодействии движение происходит в конечной области пространства лишь при отрицательной полной энергии (см. § 15).

[1] Выражение в правой стороне равенства (10,5) иногда называют вириалом системы.

Задачи

1. Как относятся времена движения по одинаковым траекториям точек с различными массами при одинаковой потенциальной энергии?

Ответ:

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{m'}{m}}.$$

2. Как изменяются времена движения по одинаковым траекториям при изменении потенциальной энергии на постоянный множитель?

Ответ:

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{U}{U'}}.$$