ГЛАВА III

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

§ 11. Одномерное движение

Одномерным называют движение системы с одной степенью свободы. Наиболее общий вид лагранжевой функции такой системы, находящейся в постоянных внешних условиях, есть

$$L = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q), \tag{11,1}$$

где $a(q)$ — некоторая функция обобщенной координаты q. В частности, если q есть декартова координата (назовем ее x),

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \tag{11,2}$$

Соответствующие этим лагранжевым функциям уравнения движения интегрируются в общем виде. При этом нет даже необходимости выписывать самое уравнение движения, а следует исходить сразу из его первого интеграла — уравнения, выражающего закон сохранения энергии. Так, для функции Лагранжа (11,2) имеем:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E.$$

Это есть дифференциальное уравнение первого порядка, интегрирующееся путем разделения переменных. Имеем:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]},$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{const}. \tag{11,3}$$

Роль двух произвольных постоянных в решении уравнения движения играют здесь полная энергия E и постоянная интегрирования const.

Поскольку кинетическая энергия — величина существенно положительная, то при движении полная энергия всегда больше потенциальной, т. е. движение может происходить только в тех областях пространства, где $U(x) < E$.

Пусть, например, зависимость $U(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 6. Проведя на этом же графике горизонтальную прямую, соответствующую заданному значению полной энергии, мы сразу же выясним возможные области движения. Так в изображенном на рис. 6 случае движение может происходить лишь в области AB или в области справа от C.

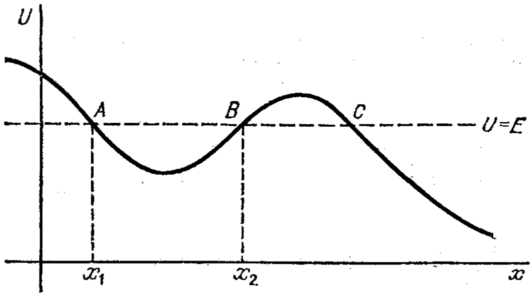

Рис. 6

Точки, в которых потенциальная энергия равна полной

$$U(x) = E, \tag{11,4}$$

определяют границы движения. Они являются *точками остановки*, поскольку в них скорость обращается в нуль. Если область движения ограничена двумя такими точками, то движение происходит в ограниченной области пространства; оно является, как говорят, *финитным*. Если же область движения не ограничена или ограничена лишь с одной стороны, — движение *инфинитно*, частица уходит на бесконечность.

Одномерное финитное движение является колебательным — частица совершает периодически повторяющееся движение между двумя границами (на рис. 6 в *потенциальной яме* AB между точками x_1 и x_2). При этом согласно общему свойству обратимости (стр. 18) время движения от x_1 до x_2 равно времени обратного движения от x_2 до x_1. Поэтому период колебаний T, т. е. время, за которое точка пройдет от x_1 до x_2 и обратно, равен удвоенному времени прохождения отрезка x_1x_2 или согласно (11,3)

$$T(E) = \sqrt{2m} \int\limits_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \tag{11,5}$$

причем пределы x_1 и x_2 являются корнями уравнения (11,4) при данном значении E. Эта формула определяет период движения в зависимости от полной энергии частицы.

Задачи

1. Определить период колебаний плоского математического маятника (точка m на конце нити длиной l в поле тяжести) в зависимости от их амплитуды.

Решение. Энергия маятника

$$E=\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}-mgl\cos\varphi=-mgl\cos\varphi_0,$$

где φ — угол отклонения нити от вертикали; φ_0 — максимальный угол отклонения. Вычисляя период как учетверенное время прохождения интервала углов от нуля до φ_0, находим:

$$T=4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int\limits_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Подстановкой $\frac{\sin{}^1/_2\varphi}{\sin{}^1/_2\varphi_0}=\sin\xi$ этот интеграл приводится к виду

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

где

$$K(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$$

— так называемый полный эллиптический интеграл первого рода. При $\sin\frac{\varphi_0}{2}\approx\frac{\varphi_0}{2}\ll 1$ (малые колебания) разложение функции $K(k)$ дает:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\varphi_0^2+\ldots\right).$$

Первый член этого разложения отвечает известной элементарной формуле.

2. Определить период колебаний в зависимости от энергии при движении частицы массы m в полях с потенциальной энергией:

а) $U=A|x|^n$.

Ответ:

$$T=2\sqrt{2m}\int\limits_0^{(E/A)^{1/n}}\frac{dx}{\sqrt{E-Ax^n}}=\frac{2\sqrt{2m}\,E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}}{A^{1/n}}\int\limits_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^n}}.$$

Подстановкой $y^n=u$ интеграл приводится к так называемому B-интегралу Эйлера, который выражается через Г-функции

$$T=\frac{2\sqrt{2\pi m}\,\Gamma(1/n)}{nA^{1/n}\Gamma(1/n+1/2)}E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}.$$

Зависимость T от E соответствует закону механического подобия (10,2), (10,3).

б) $U=-U_0/\mathrm{ch}^2\alpha x,\ -U_0<E<0$.

Ответ:

$$T = \pi\sqrt{2m}/\alpha\sqrt{|E|}.$$

в) $U = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$.

Ответ:

$$T = \pi\sqrt{2m}/\alpha\sqrt{E + U_0}.$$

§ 12. Определение потенциальной энергии по периоду колебаний

Рассмотрим вопрос о том, в какой степени можно восстановить вид потенциальной энергии $U(x)$ поля, в котором частица совершает колебательное движение, по известной зависимости периода этого движения T от энергии E. С математической точки зрения речь идет о решении интегрального уравнения (11,5), в котором $U(x)$ рассматривается как неизвестная, а $T(E)$ — как известная функции.

При этом мы будем заранее предполагать, что искомая функция $U(x)$ имеет в рассматриваемой области пространства лишь один минимум, оставляя в стороне вопрос о возможности существования решений интегрального уравнения, не удовлетворяющих этому условию. Для удобства выберем начало координат в положении минимума потенциальной энергии, а значение последней в этой точке положим равным нулю (рис. 7).

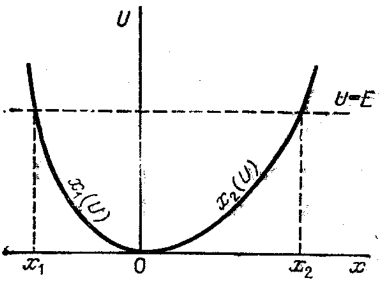

Рис. 7

Преобразуем интеграл (11,5), рассматривая в нем координату x как функцию U. Функция $x(U)$ двузначна — каждое значение потенциальной энергии осуществляется при двух различных значениях x. Соответственно этому интеграл (11,5), в котором мы заменяем dx на $\frac{dx}{dU}dU$, перейдет в сумму двух интегралов: от $x = x_1$ до $x = 0$ и от $x = 0$ до $x = x_2$; будем писать зависимость x от U в этих двух областях соответственно как $x = x_1(U)$ и $x = x_2(U)$.

Пределами интегрирования по dU будут, очевидно, E и 0, так что получаем:

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \sqrt{2m}\int_E^0 \frac{dx_1(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}} =$$

$$= \sqrt{2m}\int_0^E \left[\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU}\right]\frac{dU}{\sqrt{E-U}}.$$