Ответ:

$$T = \pi\sqrt{2m}/\alpha\sqrt{|E|}.$$

в) $U = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$.

Ответ:

$$T = \pi\sqrt{2m}/\alpha\sqrt{E + U_0}.$$

§ 12. Определение потенциальной энергии по периоду колебаний

Рассмотрим вопрос о том, в какой степени можно восстановить вид потенциальной энергии $U(x)$ поля, в котором частица совершает колебательное движение, по известной зависимости периода этого движения T от энергии E. С математической точки зрения речь идет о решении интегрального уравнения (11,5), в котором $U(x)$ рассматривается как неизвестная, а $T(E)$ — как известная функции.

При этом мы будем заранее предполагать, что искомая функция $U(x)$ имеет в рассматриваемой области пространства лишь один минимум, оставляя в стороне вопрос о возможности существования решений интегрального уравнения, не удовлетворяющих этому условию. Для удобства выберем начало координат в положении минимума потенциальной энергии, а значение последней в этой точке положим равным нулю (рис. 7).

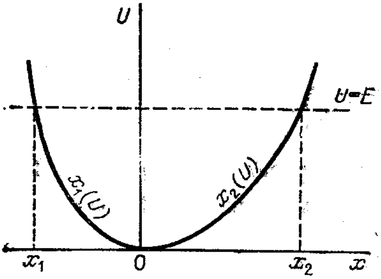

Рис. 7

Преобразуем интеграл (11,5), рассматривая в нем координату x как функцию U. Функция $x(U)$ двузначна — каждое значение потенциальной энергии осуществляется при двух различных значениях x. Соответственно этому интеграл (11,5), в котором мы заменяем dx на $\frac{dx}{dU}dU$, перейдет в сумму двух интегралов: от $x = x_1$ до $x = 0$ и от $x = 0$ до $x = x_2$; будем писать зависимость x от U в этих двух областях соответственно как $x = x_1(U)$ и $x = x_2(U)$.

Пределами интегрирования по dU будут, очевидно, E и 0, так что получаем:

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \sqrt{2m}\int_E^0 \frac{dx_1(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}} =$$

$$= \sqrt{2m}\int_0^E \left[\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU}\right]\frac{dU}{\sqrt{E-U}}.$$

Разделим обе стороны этого равенства на $\sqrt{\alpha - E}$, где α — параметр, и проинтегрируем по E от нуля до α:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m} \int_0^\alpha \int_0^E \left[\frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU}\right] \frac{dU\,dE}{\sqrt{(\alpha - E)(E - U)}},$$

или, меняя порядок интегрирования:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m} \int_0^\alpha \left[\frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU}\right] dU \int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha - E)(E - U)}}.$$

Интеграл по dE вычисляется элементарно и оказывается равным π. После этого интегрирование по dU становится тривиальным и дает:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \pi \sqrt{2m}\,[x_2(\alpha) - x_1(\alpha)]$$

(при этом учтено, что $x_2(0) = x_1(0) = 0$). Заменив теперь букву α на U, находим окончательно:

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{U - E}}. \tag{12,1}$$

Таким образом, по известной функции $T(E)$ определяется разность $x_2(U) - x_1(U)$. Сами же функции $x_2(U)$ и $x_1(U)$ остаются неопределенными. Это значит, что существует не одна, а бесчисленное множество кривых $U = U(x)$, приводящих к заданной зависимости периода от энергии и отличающихся друг от друга такими деформациями, которые не меняют разности двух значений x, соответствующих одному и тому же значению U.

Многозначность решения исчезает, если потребовать, чтобы кривая $U = U(x)$ была симметрична относительно оси ординат, т. е. чтобы было:

$$x_2(U) = -x_1(U) \equiv x(U).$$

В таком случае формула (12,1) дает для $x(U)$ однозначное выражение

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{U - E}}. \tag{12,2}$$