§ 13. Приведенная масса

Полное решение в общем виде допускает чрезвычайно важная задача о движении системы, состоящей всего из двух взаимодействующих частиц (*задача двух тел*).

В качестве предварительного шага к решению этой задачи покажем, каким образом она может быть существенно упрощена путем разложения движения системы на движение центра инерции и движения точек относительно последнего.

Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц зависит лишь от расстояния между ними, т. е. от абсолютной величины разности их радиус-векторов. Поэтому лагранжева функция такой системы

$$L=\frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2}{2}+\frac{m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2}{2}-U(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|). \qquad (13,1)$$

Введем вектор взаимного расстояния обеих точек

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$$

и поместим начало координат в центре инерции, что дает:

$$m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2=0.$$

Из двух последних равенств находим:

$$\mathbf{r}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}. \qquad (13,2)$$

Подставляя эти выражения в (13,1), получим:

$$L=\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}-U(r), \qquad (13,3)$$

где введено обозначение

$$m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}; \qquad (13,4)$$

величина m называется *приведенной массой*. Функция (13,3) формально совпадает с функцией Лагранжа одной материальной точки с массой m, движущейся во внешнем поле $U(r)$, симметричном относительно неподвижного начала координат.

Таким образом, задача о движении двух взаимодействующих материальных точек сводится к решению задачи о движении одной точки в заданном внешнем поле $U(r)$. По решению $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ этой задачи траектории $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_2(t)$ каждой из частиц m_1 и m_2 в отдельности (по отношению к их общему центру инерции) получаются по формулам (13,2).

Задача

Система состоит из одной частицы с массой M и n частиц с одинаковыми массами m. Исключить движение центра инерции и свести задачу к задаче о движении n частиц.

Решение. Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор частицы M, а $\mathbf{R}_a$ ($a = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$) — радиус-векторы частиц с массами m. Введем расстояния от частицы M до частиц m

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R}_a - \mathbf{R}$$

и поместим начало координат в центре инерции:

$$M\mathbf{R} + m\sum_a \mathbf{R}_a = 0.$$

Из этих равенств находим:

$$\mathbf{R} = -\frac{m}{\mu}\sum_a \mathbf{r}_a, \qquad \mathbf{R}_a = \mathbf{R} + \mathbf{r}_a,$$

где $\mu = M + nm$. Подставив эти выражения в функцию Лагранжа

$$L = \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{m}{2}\sum_a \dot{\mathbf{R}}_a^2 - U,$$

получим:

$$L = \frac{m}{2}\sum_a \mathbf{v}_a^2 - \frac{m^2}{2\mu}\left(\sum_a \mathbf{v}_a\right)^2 - U,$$

где $\mathbf{v}_a \equiv \dot{\mathbf{r}}_a$.

Потенциальная энергия зависит лишь от расстояний между частицами и потому может быть представлена как функция от векторов $\mathbf{r}_a$.

§ 14. Движение в центральном поле

Сведя задачу о движении двух тел к задаче о движении одного тела, мы пришли к вопросу об определении движения частицы во внешнем поле, в котором ее потенциальная энергия зависит только от расстояния r до определенной неподвижной точки; такое поле называют *центральным*. Сила

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dU}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

действующая на частицу, по абсолютной величине зависит при этом тоже только от r и направлена в каждой точке вдоль радиус-вектора.

Как было уже показано в § 9, при движении в центральном поле сохраняется момент системы относительно центра поля. Для одной частицы момент

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}].$$

Поскольку векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{r}$ взаимно перпендикулярны, постоянство $\mathbf{M}$ означает, что при движении частицы ее радиус-вектор все время остается в одной плоскости — плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{M}$.

Таким образом, траектория движения частицы в центральном поле лежит целиком в одной плоскости. Введя в ней