Решение. Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор частицы M, а $\mathbf{R}_a$ ($a = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$) — радиус-векторы частиц с массами m. Введем расстояния от частицы M до частиц m

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R}_a - \mathbf{R}$$

и поместим начало координат в центре инерции:

$$M\mathbf{R} + m \sum_a \mathbf{R}_a = 0.$$

Из этих равенств находим:

$$\mathbf{R} = -\frac{m}{\mu} \sum_a \mathbf{r}_a, \qquad \mathbf{R}_a = \mathbf{R} + \mathbf{r}_a,$$

где $\mu = M + nm$. Подставив эти выражения в функцию Лагранжа

$$L = \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{m}{2} \sum_a \dot{\mathbf{R}}_a^2 - U,$$

получим:

$$L = \frac{m}{2} \sum_a \mathbf{v}_a^2 - \frac{m^2}{2\mu} \left(\sum_a \mathbf{v}_a\right)^2 - U,$$

где $\mathbf{v}_a \equiv \dot{\mathbf{r}}_a$.

Потенциальная энергия зависит лишь от расстояний между частицами и потому может быть представлена как функция от векторов $\mathbf{r}_a$.

§ 14. Движение в центральном поле

Сведя задачу о движении двух тел к задаче о движении одного тела, мы пришли к вопросу об определении движения частицы во внешнем поле, в котором ее потенциальная энергия зависит только от расстояния r до определенной неподвижной точки; такое поле называют *центральным*. Сила

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

действующая на частицу, по абсолютной величине зависит при этом тоже только от r и направлена в каждой точке вдоль радиус-вектора.

Как было уже показано в § 9, при движении в центральном поле сохраняется момент системы относительно центра поля. Для одной частицы момент

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}].$$

Поскольку векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{r}$ взаимно перпендикулярны, постоянство $\mathbf{M}$ означает, что при движении частицы ее радиус-вектор все время остается в одной плоскости — плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{M}$.

Таким образом, траектория движения частицы в центральном поле лежит целиком в одной плоскости. Введя в ней полярные координаты r, φ, напишем функцию Лагранжа в виде (ср. (4,5))

$$L = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - U(r). \tag{14,1}$$

Эта функция не содержит в явном виде координату φ. Всякую обобщенную координату q_i, не входящую явным образом в лагранжеву функцию, называют *циклической*. В силу уравнения Лагранжа имеем для такой координаты:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

т. е. соответствующий ей обобщенный импульс $p_i = \partial L/\partial \dot q_i$ является интегралом движения. Это обстоятельство приводит к существенному упрощению задачи интегрирования уравнений движения при наличии циклических координат.

В данном случае обобщенный импульс

$$p_\varphi = mr^2\dot\varphi$$

совпадает с моментом $M_z = M$ (см. (9,6)), так что мы возвращаемся к известному уже нам закону сохранения момента

$$M = mr^2\dot\varphi = \text{const}. \tag{14,2}$$

Заметим, что для плоского движения одной частицы в центральном поле этот закон допускает простую геометрическую интерпретацию. Выражение $\frac{1}{2} r \cdot r\,d\varphi$ представляет собой площадь сектора, образованного двумя бесконечно близкими радиус-векторами и элементом дуги траектории (рис. 8). Обозначив ее как df, напишем момент частицы в виде

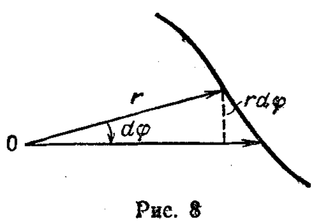

Рис. 8

$$M = 2m\dot f, \tag{14,3}$$

где производную $\dot f$ называют *секториальной скоростью*. Поэтому сохранение момента означает постоянство секториальной скорости — за равные промежутки времени радиус-вектор движущейся точки описывает равные площади (так называемый *второй закон Кеплера*[1])).

Полное решение задачи о движении частицы в центральном поле проще всего получить, исходя из законов сохранения энергии и момента, не выписывая при этом самих уравнений дви-

---

[1]) Закон сохранения момента для частицы, движущейся в центральном поле, иногда называют *интегралом площадей*.

жения. Выражая $\dot{\varphi}$ через M из (14,2) и подставляя в выражение для энергии, получим:

$$E=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+U(r)=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2mr^2}+U(r). \qquad (14,4)$$

Отсюда

$$\dot{r}\equiv\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{m^2r^2}} \qquad (14,5)$$

или, разделяя переменные и интегрируя:

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{m^2r^2}}}+\text{const}. \qquad (14,6)$$

Далее, написав (14,2) в виде

$$d\varphi=\frac{M}{mr^2}dt,$$

подставив сюда dt из (14,5) и интегрируя, находим:

$$\varphi=\int\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}}+\text{const}. \qquad (14,7)$$

Формулы (14,6) и (14,7) решают в общем виде поставленную задачу. Вторая из них определяет связь между r и φ, т. е. уравнение траектории. Формула же (14,6) определяет в неявном виде расстояние r движущейся точки от центра как функцию времени. Отметим, что угол φ всегда меняется со временем монотонным образом — из (14,2) видно, что $\dot{\varphi}$ никогда не меняет знака.

Выражение (14,4) показывает, что радиальную часть движения можно рассматривать как одномерное движение в поле с «эффективной» потенциальной энергией

$$U_{\text{эфф}}=U(r)+M^2/2mr^2. \qquad (14,8)$$

Величину $M^2/2mr^2$ называют центробежной энергией. Значения r, при которых

$$U(r)+M^2/2mr^2=E, \qquad (14,9)$$

определяют границы области движения по расстоянию от центра. При выполнении равенства (14,9) радиальная скорость $\dot{r}$ обращается в нуль. Это не означает остановки частицы (как при истинном одномерном движении), так как угловая скорость $\dot{\varphi}$ не обращается в нуль. Равенство $\dot{r}=0$ означает «точку поворота» траектории, в которой функция $r(t)$ переходит от увеличения к уменьшению или наоборот.

Если область допустимого изменения r ограничена лишь одним условием $r \geqslant r_{\min}$, то движение частицы инфинитно — ее траектория приходит из бесконечности и уходит на бесконечность.

Если область изменения r имеет две границы $r_{\min}$ и $r_{\max}$, то движение является финитным и траектория целиком лежит внутри кольца, ограниченного окружностями $r = r_{\max}$ и $r = r_{\min}$ Это, однако, не означает, что траектория непременно является замкнутой кривой. За время, в течение которого r изменяется от $r_{\max}$ до $r_{\min}$ и затем до $r_{\max}$, радиус-вектор повернется на угол $\Delta\varphi$, равный согласно (14,7)

$$\Delta\varphi = 2\int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}}. \tag{14,10}$$

Условие замкнутости траектории заключается в том, чтобы этот угол был равен рациональной части от 2π, т. е. имел вид $\Delta\varphi = 2\pi m/n$, где m, n — целые числа. Тогда через n повторений этого периода времени радиус-вектор точки, сделав m полных оборотов, совпадет со своим первоначальным значением, т. е. траектория замкнется.

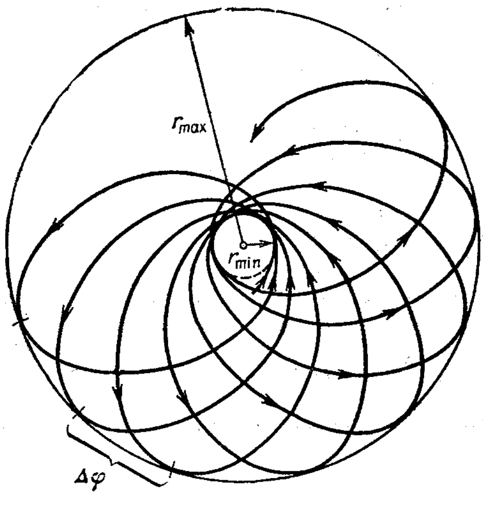

Рис. 9

Однако такие случаи исключительны, и при произвольном виде $U(r)$ угол $\Delta\varphi$ не является рациональной частью от 2π. Поэтому в общем случае траектория финитного движения не замкнута. Она бесчисленное число раз проходит через минимальное и максимальное расстояние (как, например, на рис. 9) и за бесконечное время заполняет все кольцо между двумя граничными окружностями.

Существуют лишь два типа центральных полей, в которых все траектории финитных движений замкнуты. Это поля, в которых потенциальная энергия частицы пропорциональна $1/r$ или r^2. Первый из этих случаев рассмотрен в следующем параграфе, а второй соответствует так называемому пространственному осциллятору (см. задачу 3 § 23).

В точке поворота квадратный корень (14,5) (а вместе с ним и подынтегральные выражения в (14,6) и (14,7)) меняет знак. Если отсчитывать угол φ от направления радиус-вектора, проведенного в точку поворота, то примыкающие с двух сторон к этой точке отрезки траектории будут отличаться лишь знаком φ при каждых одинаковых значениях r; это значит, что траектория симметрична относительно указанного направления. Начав, скажем, от какой-либо из точек $r = r_{\max}$, мы пройдем отрезок траектории до точки с $r = r_{\min}$, затем будем иметь симметрично расположенный такой же отрезок до следующей точки с $r = r_{\max}$ и т. д., т. е. вся траектория получается повторением в прямом и обратном направлениях одинаковых отрезков. Это относится и к инфинитным траекториям, состоящим из двух симметричных ветвей, простирающихся от точки поворота $r_{\min}$ до бесконечности.

Наличие центробежной энергии (при движении с $M \neq 0$), обращающейся при $r \to 0$ в бесконечность, как $1/r^2$, приводит обычно к невозможности проникновения движущихся частиц к центру поля, даже если последнее само по себе имеет характер притяжения. «Падение» частицы в центр возможно лишь, если потенциальная энергия достаточно быстро стремится к $-\infty$ при $r \to 0$. Из неравенства

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0$$

или

$$r^2 U(r) + \frac{M^2}{2m} < Er^2$$

следует, что r может принимать сколь угодно малые значения лишь при условии

$$r^2 U(r)\big|_{r\to 0} < -\frac{M^2}{2m}, \tag{14,11}$$

т. е. $U(r)$ должно стремиться к $-\infty$ либо как $-\alpha/r^2$ с $\alpha > M^2/2m$, либо пропорционально $-1/r^n$ с $n > 2$.

Задачи

1. Проинтегрировать уравнения движения сферического маятника — материальной точки m, движущейся по поверхности сферы радиуса l в поле тяжести.

Решение. В сферических координатах с началом в центре сферы и полярной осью, направленной вертикально вниз, функция Лагранжа маятника

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2) + mgl\cos\theta.$$

Координата φ — циклическая, поэтому сохраняется обобщенный импульс p_φ, совпадающий с z-компонентой момента:

$$ml^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi} = M_z = \text{const}. \tag{1}$$

Энергия

$$E=\frac{ml^2}{2}(\dot\theta^2+\sin^2\theta\cdot\dot\varphi^2)-mgl\cos\theta=\frac{ml^2\dot\theta^2}{2}+\frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta. \tag{2}$$

Определяя отсюда $\dot\theta$ и разделяя переменные, получим:

$$t=\int\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}\left[E-U_{эфф}(\theta)\right]}}, \tag{3}$$

где введена «эффективная потенциальная энергия»

$$U_{эфф}(\theta)=\frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta.$$

Для угла φ, используя (1), найдем

$$\varphi=\frac{M_z}{l\sqrt{2m}}\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E-U_{эфф}(\theta)}}. \tag{4}$$

Интегралы (3) и (4) приводятся к эллиптическим интегралам соответственно первого и третьего рода.

Область движения по углу θ определяется условием $E>U_{эфф}$, а ее границы — уравнением $E=U_{эфф}$. Последнее представляет собой кубическое уравнение для $\cos\theta$, имеющее в промежутке от -1 до $+1$ два корня, определяющих положение двух параллельных окружностей на сфере, между которыми заключена вся траектория.

2. Проинтегрировать уравнения движения материальной точки, движущейся по поверхности конуса (с углом 2α при вершине), расположенного вертикально, вершиной вниз, в поле тяжести.

Решение. В сферических координатах с началом в вершине конуса и полярной осью, направленной вертикально вверх, функция Лагранжа

$$L=\frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\sin^2\alpha\cdot\dot\varphi^2)-mgr\cos\alpha.$$

Координата φ — циклическая, так что снова сохраняется

$$M_z=mr^2\sin^2\alpha\cdot\dot\varphi.$$

Энергия

$$E=\frac{m\dot r^2}{2}+\frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha}+mgr\cos\alpha.$$

Тем же способом, что и в задаче 1, находим:

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-U_{эфф}(r)\right]}},$$

$$\varphi=\frac{M_z}{\sin^2\alpha\sqrt{2m}}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{E-U_{эфф}(r)}},$$

$$U_{эфф}(r)=\frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha}+mgr\cos\alpha.$$

Условие $E=U_{эфф}(r)$ представляет собой (при $M_z\neq 0$) кубическое уравнение для r, имеющее два положительных корня; ими определяется положение двух горизонтальных окружностей на поверхности конуса, между которыми заключена траектория.

3. Проинтегрировать уравнения движения плоского маятника, точка подвеса которого (с массой m_1 в ней) способна совершать движение в горизонтальном направлении (см. рис. 2).

Решение. В найденной в задаче 2 § 5 функции Лагранжа координата x — циклическая. Поэтому сохраняется обобщенный импульс P_x, совпадающий с горизонтальной компонентой полного импульса системы:

$$P_x = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = \text{const}. \tag{1}$$

Всегда можно считать систему, как целое, покоящейся; тогда $\text{const} = 0$, и интегрирование уравнения (1) дает соотношение

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l\sin\varphi = \text{const}, \tag{2}$$

выражающее собой неподвижность центра инерции системы в горизонтальном направлении. Используя (1), получим энергию в виде

$$E = \frac{m_2 l^2\dot{\varphi}^2}{2}\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos^2\varphi\right) - m_2 gl\cos\varphi. \tag{3}$$

Отсюда

$$t = l\sqrt{\frac{m_2}{2(m_1 + m_2)}}\int\sqrt{\frac{m_1 + m_2\sin^2\varphi}{E + m_2 gl\cos\varphi}}\,d\varphi.$$

Выразив координаты $x_2 = x + l\sin\varphi$, $y_2 = l\cos\varphi$ частицы m_2 с помощью (2) через φ, найдем, что траектория этой частицы представляет собой отрезок эллипса с горизонтальной полуосью $lm_1/(m_1 + m_2)$ и вертикальной l. При $m_1 \to \infty$ мы возвращаемся к обычному математическому маятнику, качающемуся по дуге окружности.

§ 15. Кеплерова задача

Важнейшим случаем центральных полей являются поля, в которых потенциальная энергия обратно пропорциональна r и соответственно силы обратно пропорциональны r^2. Сюда относятся ньютоновские поля тяготения и кулоновские электростатические поля; первые, как известно, имеют характер притяжения, а вторые могут быть как полями притяжения, так и отталкивания.

Рассмотрим сначала поле притяжения, в котором

$$U = -\frac{\alpha}{r} \tag{15,1}$$

с положительной постоянной α. График «эффективной» потенциальной энергии

$$U_{\text{эфф}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{15,2}$$

имеет вид, изображенный на рис. 10. При $r \to 0$ она обращается в $+\infty$, а при $r \to \infty$ стремится к нулю со стороны отрицательных значений; при $r = M^2/\alpha m$ она имеет минимум, равный

$$(U_{\text{эфф}})_{\min} = -\alpha^2 m/2M^2. \tag{15,3}$$