ние двух горизонтальных окружностей на поверхности конуса, между которыми заключена траектория.

3. Проинтегрировать уравнения движения плоского маятника, точка подвеса которого (с массой m_1 в ней) способна совершать движение в горизонтальном направлении (см. рис. 2).

Решение. В найденной в задаче 2 § 5 функции Лагранжа координата x — циклическая. Поэтому сохраняется обобщенный импульс P_x, совпадающий с горизонтальной компонентой полного импульса системы:

$$P_x = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = \text{const}. \tag{1}$$

Всегда можно считать систему, как целое, покоящейся; тогда const = 0, и интегрирование уравнения (1) дает соотношение

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l\sin\varphi = \text{const}, \tag{2}$$

выражающее собой неподвижность центра инерции системы в горизонтальном направлении. Используя (1), получим энергию в виде

$$E = \frac{m_2 l^2\dot{\varphi}^2}{2}\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos^2\varphi\right) - m_2 gl\cos\varphi. \tag{3}$$

Отсюда

$$t = l\sqrt{\frac{m_2}{2(m_1 + m_2)}}\int\sqrt{\frac{m_1 + m_2\sin^2\varphi}{E + m_2 gl\cos\varphi}}\,d\varphi.$$

Выразив координаты $x_2 = x + l\sin\varphi$, $y_2 = l\cos\varphi$ частицы m_2 с помощью (2) через φ, найдем, что траектория этой частицы представляет собой отрезок эллипса с горизонтальной полуосью $lm_1/(m_1 + m_2)$ и вертикальной l. При $m_1 \to \infty$ мы возвращаемся к обычному математическому маятнику, качающемуся по дуге окружности.

§ 15. Кеплерова задача

Важнейшим случаем центральных полей являются поля, в которых потенциальная энергия обратно пропорциональна r и соответственно силы обратно пропорциональны r^2. Сюда относятся ньютоновские поля тяготения и кулоновские электростатические поля; первые, как известно, имеют характер притяжения, а вторые могут быть как полями притяжения, так и отталкивания.

Рассмотрим сначала поле притяжения, в котором

$$U = -\frac{\alpha}{r} \tag{15,1}$$

с положительной постоянной α. График «эффективной» потенциальной энергии

$$U_{\text{эфф}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{15,2}$$

имеет вид, изображенный на рис. 10. При $r \to 0$ она обращается в $+\infty$, а при $r \to \infty$ стремится к нулю со стороны отрицательных значений; при $r = M^2/\alpha m$ она имеет минимум, равный

$$(U_{\text{эфф}})_{\min} = -\alpha^2 m/2M^2. \tag{15,3}$$

Из этого графика сразу очевидно, что при $E > 0$ движение частицы будет инфинитным, а при $E < 0$ — финитным.

Форма траектории получается с помощью общей формулы (14,7). Подставляя в нее $U = -\alpha/r$ и производя элементарное интегрирование, получим:

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + m^2\alpha^2/M^2}} + \text{const}.$$

Выбирая начало отсчета угла φ так, чтобы $\text{const} = 0$, и вводя обозначения

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}, \tag{15,4}$$

перепишем формулу для траектории в виде

$$p/r = 1 + e\cos\varphi. \tag{15,5}$$

Это есть уравнение конического сечения с фокусом в начале координат; p и e — так называемые *параметр* и *эксцентриситет* орбиты. Сделанный нами выбор начала отсчета φ заключается, как видно из (15,5), в том, что точка с $\varphi = 0$ является ближайшей к центру (так называемый *перигелий* орбиты).

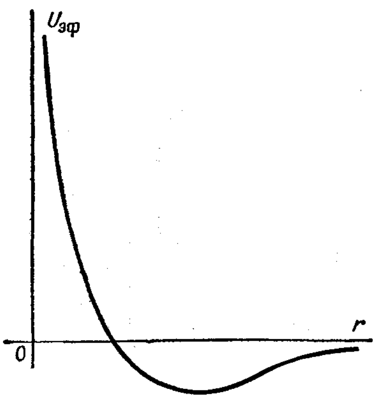

Рис. 10

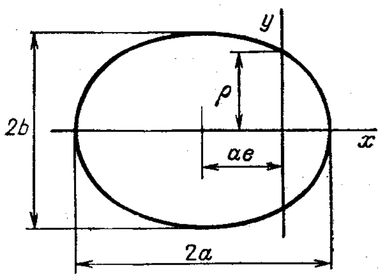

Рис. 11

В эквивалентной задаче двух тел, взаимодействующих по закону (15,1), орбита каждой из частиц тоже представляет собой коническое сечение с фокусом в их общем центре инерции.

Из (15,4) видно, что при $E < 0$ эксцентриситет $e < 1$, т. е. орбита является эллипсом (рис. 11) и движение финитно в соответствии со сказанным в начале параграфа. Согласно известным формулам аналитической геометрии большая и малая полуоси эллипса

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \tag{15,6}$$

Наименьшее допустимое значение энергии совпадает с (15,3), при этом $e=0$, т. е. эллипс обращается в окружность. Отметим, что большая полуось эллипса зависит только от энергии (но не от момента) частицы. Наименьшее и наибольшее расстояния до центра поля (фокуса эллипса) равны

$$r_{\min}=\frac{p}{1+e}=a(1-e), \quad r_{\max}=\frac{p}{1-e}=a(1+e). \qquad (15,7)$$

Эти выражения (с a и e из (15,6) и (15,4)) можно было бы, конечно, получить и непосредственно как корни уравнения $U_{\text{эфф}}(r)=E$.

Время обращения по эллиптической орбите, т. е. период движения T, удобно определить с помощью закона сохранения момента в форме «интеграла площадей» (14,3). Интегрируя это равенство по времени от нуля до T, получим:

$$2mf=TM,$$

где f — площадь орбиты. Для эллипса $f=\pi ab$, и с помощью формул (15,6) находим:

$$T=2\pi a^{3/2}\sqrt{m/\alpha}=\pi\alpha\sqrt{m/2|E|^3}. \qquad (15,8)$$

Тот факт, что квадрат периода должен быть пропорционален кубу линейных размеров орбиты, был указан уже в § 10. Отметим также, что период зависит только от энергии частицы.

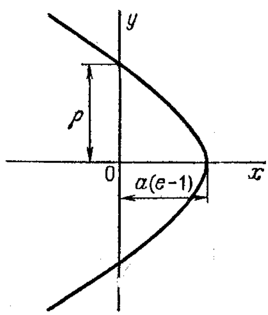

Рис. 12

При $E\geqslant 0$ движение инфинитно. Если $E>0$, то эксцентриситет $e>1$, т. е. траектория является гиперболой, огибающей центр поля (фокус), как показано на рис. 12. Расстояние перигелия от центра

$$r_{\min}=\frac{p}{e+1}=a(e-1), \qquad (15,9)$$

где

$$a=\frac{p}{e^2-1}=\frac{\alpha}{2E}$$

— «полуось» гиперболы.

В случае же $E=0$ эксцентриситет $e=1$, т. е. частица движется по параболе, с расстоянием перигелия $r_{\min}=p/2$. Этот случай осуществляется, если частица начинает свое движение из состояния покоя на бесконечности.

Зависимость координат частицы от времени при движении по орбите может быть найдена с помощью общей формулы (14,6). Она может быть представлена в удобном параметрическом виде следующим образом.

Рассмотрим сначала эллиптические орбиты. Вводя a и e согласно (15,4), (15,6), напишем интеграл (14,6), определяющий время, в виде

$$t=\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{rdr}{\sqrt{-r^2+\frac{\alpha}{|E|}r-\frac{M^2}{2m|E|}}}=\sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int\frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}.$$

С помощью естественной подстановки

$$r-a=-ae\cos\xi$$

этот интеграл приводится к виду

$$t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\int(1-e\cos\xi)\,d\xi=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\sin\xi)+\text{const}.$$

Выбирая начало отсчета времени так, чтобы обратить const в нуль, получим окончательно следующее параметрическое представление зависимости r от t:

$$r=a(1-e\cos\xi),\quad t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\sin\xi) \tag{15,10}$$

(в момент $t=0$ частица находится в перигелии). Через тот же параметр ξ можно выразить и декартовы координаты частицы $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ (оси x и y направлены соответственно по большой и малой полуосям эллипса). Из (15.5) и (15.10) имеем:

$$ex=p-r=a(1-e^2)-a(1-e\cos\xi)=ae(\cos\xi-e),$$

а y найдем, как $\sqrt{r^2-x^2}$. Окончательно:

$$x=a(\cos\xi-e),\quad y=a\sqrt{1-e^2}\sin\xi. \tag{15,11}$$

Полному обороту по эллипсу соответствует изменение параметра ξ от нуля до 2π.

Совершенно аналогичные вычисления для гиперболических траекторий приводят к результату

$$\begin{aligned} r&=a(e\operatorname{ch}\xi-1), & t&=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\operatorname{sh}\xi-\xi),\\ x&=a(e-\operatorname{ch}\xi), & y&=a\sqrt{e^2-1}\operatorname{sh}\xi, \end{aligned} \tag{15,12}$$

где параметр ξ пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Обратимся к движению в поле отталкивания, в котором

$$U=\alpha/r \tag{15,13}$$

$(\alpha>0)$. В этом случае эффективная потенциальная энергия

$$U_{\text{эфф}}=\frac{\alpha}{r}+\frac{M^2}{2mr^2}$$

монотонно убывает от $+\infty$ до нуля при изменении r от нуля до ∞. Энергия частицы может быть только положительной и движение всегда инфинитно. Все вычисления для этого случая в точности аналогичны произведенным выше. Траектория является гиперболой

$$\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi \tag{15,14}$$

(p и e определяются прежними формулами (15,4)). Она проходит мимо центра поля, как показано на рис. 13. Расстояние перигелия

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1} = a(e+1). \tag{15,15}$$

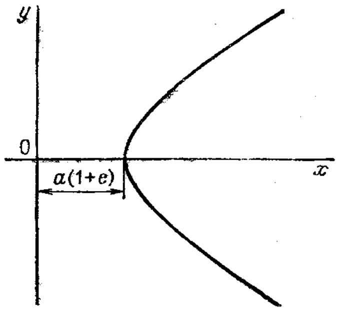

Рис. 13

Зависимость от времени дается параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} r &= a(e\,\mathrm{ch}\,\xi + 1), \\ t &= \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\,\mathrm{sh}\,\xi + \xi), \\ x &= a(\mathrm{ch}\,\xi + e), \\ y &= a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{sh}\,\xi. \end{aligned} \tag{15,16}$$

В заключение параграфа укажем, что при движении в поле $U = \alpha/r$ (с любым знаком α) имеется интеграл движения, специфический именно для этого поля. Легко проверить непосредственным вычислением, что величина

$$[\mathbf{vM}] + \alpha\mathbf{r}/r = \mathrm{const}. \tag{15,17}$$

Действительно, ее полная производная по времени равна

$$[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{M}] + \frac{\alpha\mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha\mathbf{r}(\mathbf{vr})}{r^3},$$

или, подставив $\mathbf{M} = m[\mathbf{rv}]$:

$$m\mathbf{r}(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) - m\mathbf{v}(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}) + \frac{\alpha\mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha\mathbf{r}(\mathbf{vr})}{r^3};$$

положив здесь согласно уравнениям движения $m\dot{\mathbf{v}} = \alpha\mathbf{r}/r^3$, мы найдем, что это выражение обращается в нуль.

Сохраняющийся вектор (15,17) направлен вдоль большой оси от фокуса к перигелию, а по величине равен αe. В этом проще всего можно убедиться, рассмотрев его значение в перигелии.

Подчеркнем, что интеграл движения (15,17), как и интегралы M и E, является однозначной функцией состояния (положения и скорости) частицы. Мы увидим в § 50, что появление такого дополнительного однозначного интеграла связано с так называемым вырождением движения.

Задачи

1. Найти зависимость координат частицы от времени при движении в поле $U = -\alpha/r$ с энергией $E = 0$ (по параболе).

Решение. В интеграле

$$t = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m} r - \frac{M^2}{m^2}}}$$

делаем подстановку

$$r = \frac{M^2}{2m\alpha}(1+\eta^2) = \frac{p}{2}(1+\eta^2)$$

и в результате получаем следующее параметрическое представление искомой зависимости:

$$r = \frac{p}{2}(1+\eta^2), \qquad t = \sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\,\frac{\eta}{2}\left(1+\frac{\eta^2}{3}\right),$$

$$x = \frac{p}{2}(1-\eta^2), \qquad y = p\eta.$$

Параметр η пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$.

2. Проинтегрировать уравнения движения материальной точки в центральном поле $U = -\alpha/r^2$, $\alpha > 0$.

Решение. По формулам (14,6), (14,7) с соответствующим выбором начала отсчета φ и t находим:

а) при $E > 0$, $\frac{M^2}{2m} > \alpha$ $\qquad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{M^2 - 2m\alpha}} \cos\left[\varphi\sqrt{1-\frac{2m\alpha}{M^2}}\right]$,

б) при $E > 0$, $\frac{M^2}{2m} < \alpha$ $\qquad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha - M^2}} \operatorname{sh}\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right]$,

в) при $E < 0$, $\frac{M^2}{2m} < \alpha$ $\qquad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha - M^2}} \operatorname{ch}\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right]$.

Во всех трех случаях

$$t = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{Er^2 - \frac{M^2}{2m} + \alpha}.$$

В случаях б) и в) частица «падает» на центр по траектории, приближающейся к началу координат при $\varphi \to \infty$. Падение с заданного расстояния r происходит за конечное время, равное

$$\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\left\{\sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m} + Er^2} - \sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m}}\right\}.$$

3. При добавлении к потенциальной энергии $U = -\alpha/r$ малой добавки $\delta U(r)$ траектории финитного движения перестают быть замкнутыми и при каждом обороте перигелий орбиты смещается на малую угловую величину $\delta\varphi$. Определить $\delta\varphi$ для случаев а) $\delta U = \beta/r^2$, б) $\delta U = \gamma/r^3$.

Решение. При изменении r от r_{min} до r_{max} и снова до r_{min} угол $\delta\varphi$ меняется на величину, даваемую формулой (14,10), которую представим в виде

$$\Delta\varphi = -2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}}\,dr$$

(с целью избежать ниже фиктивно расходящихся интегралов). Положим $U = -\alpha/r + \delta U$ и разложим подынтегральное значение по степеням δU; нулевой член разложения дает 2π, а член первого порядка — искомое смещение $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{2m\delta U\cdot dr}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2m}{M}\int_0^{\pi} r^2\delta U d\varphi\right), \quad (1)$$

где от интегрирования по dr мы перешли к интегрированию по $d\varphi$ вдоль траектории «невозмущенного» движения.

В случае а) интегрирование в (1) тривиально и дает:

$$\delta\varphi = -\frac{2\pi\beta m}{M^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha p}$$

(p — параметр невозмущенного эллипса из (15,4)). В случае б) $r^2\delta U = \gamma/r$, и, взяв $1/r$ из (15,5), получим:

$$\delta\varphi = -\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4} = -\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}.$$