ГЛАВА IV

СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ

§ 16. Распад частиц

Уже сами по себе законы сохранения импульса и энергии позволяют сделать во многих случаях ряд важных заключений о свойствах различных механических процессов. При этом особенно существенно то обстоятельство, что эти свойства совершенно не зависят от конкретного рода взаимодействия между участвующими в процессе частицами.

Начнем с процесса, представляющего собой «самопроизвольный» (т. е. без воздействия внешних сил) распад частицы на две «составные части», т. е. на две другие частицы, движущиеся после распада независимо друг от друга.

Наиболее просто этот процесс выглядит при рассмотрении его в системе отсчета, в которой частица (до распада) покоилась. В силу закона сохранения импульса сумма импульсов обеих образовавшихся в результате распада частиц тоже равна нулю, т. е. частицы разлетаются с равными и противоположно направленными импульсами. Их общее абсолютное значение (обозначим его p_0) определяется законом сохранения энергии

$$E_{\text{вн}} = E_{1\text{вн}} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2\text{вн}} + \frac{p_0^2}{2m_2},$$

где m_1 и m_2 — массы частиц, $E_{1\text{вн}}$ и $E_{2\text{вн}}$ — их внутренние энергии, а $E_{\text{вн}}$ — внутренняя энергия первоначальной (распадающейся) частицы. Обозначим посредством ε «энергию распада», т. е. разность

$$\varepsilon = E_{\text{вн}} - E_{1\text{вн}} - E_{2\text{вн}} \qquad (16,1)$$

(очевидно, что эта величина должна быть положительной для того, чтобы распад был вообще возможен). Тогда имеем:

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p_0^2}{2m}, \qquad (16,2)$$

чем и определяется p_0 (m — приведенная масса обеих частиц); скорости же частиц $v_{10} = p_0/m_1$, $v_{20} = p_0/m_2$.

Перейдем теперь к системе отсчета, в которой первичная частица движется до распада со скоростью V. Эту систему отсчета обычно называют лабораторной (или *л*-системой) в противоположность «системе центра инерции» (или *ц-системе*), в которой полный импульс равен нулю. Рассмотрим одну из распадных частиц и пусть **v** и $\mathbf{v}_0$ — ее скорости соответственно в *л*- и *ц*-системе. Из очевидного равенства $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_0$, или $\mathbf{v} - \mathbf{V} = \mathbf{v}_0$, имеем:

$$v^2 + V^2 - 2vV\cos\theta = v_0^2, \tag{16,3}$$

где θ — угол вылета частицы по отношению к направлению скорости **V**. Этим уравнением определяется зависимость скорости распадной частицы от направления ее вылета в *л*-системе. Она может быть представлена графически с помощью диаграммы,

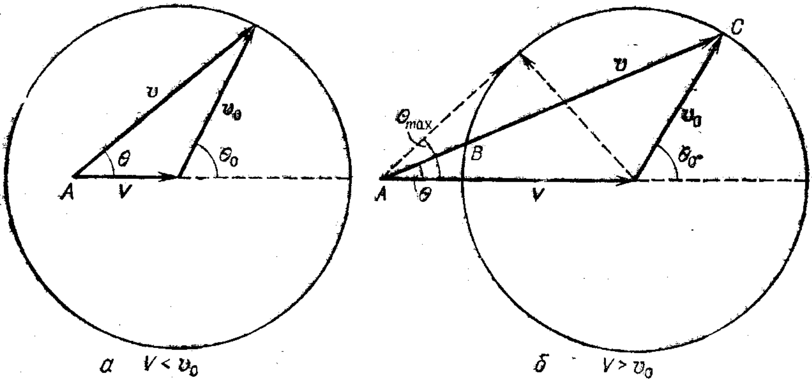

Рис. 14

изображенной на рис. 14. Скорость **v** дается вектором, проведенным в какую-либо точку окружности радиуса v_0 [1]) из точки *A*, отстоящей на расстояние *V* от центра окружности. Случаям $V < v_0$ и $V > v_0$ отвечают соответственно рис. 14, *а* и *б*. В первом случае частица может вылететь под любым углом θ. Во втором же случае частица может вылететь только вперед, под углом θ, не превышающим значения θ_{max}, даваемого равенством

$$\sin\theta_{max} = v_0/V \tag{16,4}$$

(направление касательной к окружности, проведенной из точки *A*).

Связь между углами вылета θ и θ_0 в *л*- и *ц*-системах очевидна из той же диаграммы и дается формулой

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_0\sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0 + V}. \tag{16,5}$$

---

[1]) Точнее — любую точку сферы радиуса v_0, диаметральным сечением которой является изображенная на рис. 14 окружность.

Если решить это уравнение относительно $\cos\theta_0$, то после элементарных преобразований получим:

$$\cos\theta_0 = -\frac{V}{v_0}\sin^2\theta \pm \cos\theta\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}. \tag{16,6}$$

При $v_0 > V$ связь между θ_0 и θ однозначна, как это видно из рис. 14, *а*. В формуле (16,6) надо при этом выбрать знак $+$ перед корнем (так, чтобы было $\theta_0 = 0$ при $\theta = 0$). Если же $v_0 < V$, то связь между θ_0 и θ неоднозначна: каждому значению θ отвечают два значения θ_0, соответствующие (на рис. 14, *б*) векторам $\mathbf{v}_0$, проведенным из центра окружности в точки B или C; им отвечают два знака перед корнем в (16,6).

В физических применениях приходится обычно иметь дело с распадом не одной, а многих одинаковых частиц, в связи с чем возникают вопросы о распределении распадных частиц по направлениям, энергиям и т. п. При этом мы будем предполагать, что первичные частицы ориентированы в пространстве хаотическим, т. е. в среднем изотропным образом.

В *ц*-системе ответ на эти вопросы тривиален: все распадные частицы (одинакового рода) имеют одинаковую энергию, а их распределение по направлениям вылета изотропно. Последнее утверждение связано со сделанным предположением о хаотичности ориентаций первичных частиц. Оно означает, что доля числа частиц, летящих в элементе телесного угла do_0, пропорциональна величине этого элемента, т. е. равна $do_0/4\pi$. Распределение по углам θ_0 получим отсюда, подставим $do_0 = 2\pi\sin\theta_0\, d\theta_0$, т. е.

$$\tfrac{1}{2}\sin\theta_0\, d\theta_0. \tag{16,7}$$

Распределения в *л*-системе получаются путем соответствующего преобразования этого выражения. Определим, например, распределение по кинетической энергии в *л*-системе. Возводя в квадрат равенство $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}$, находим:

$$v^2 = v_0^2 + V^2 + 2v_0 V\cos\theta_0,$$

откуда

$$d\cos\theta_0 = d(v^2)/2v_0V.$$

Вводя сюда кинетическую энергию $T = mv^2/2$ (где m есть m_1 или m_2, смотря по тому, какого рода распадные частицы мы рассматриваем) и подставляя в (16,7), получим искомое распределение

$$dT/2mv_0V. \tag{16,8}$$

Кинетическая энергия может пробегать значения от наименьшего $T_{min} = \frac{m}{2}(v_0 - V)^2$ до наибольшего $T_{max} = \frac{m}{2}(v_0 + V)^2$. В этом интервале частицы распределены согласно (16,8) однородно.

При распаде частицы на более чем две части законы сохранения импульса и энергии оставляют, естественно, значительно больший произвол в скоростях и направлениях распадных частиц, чем при распаде на две части. В частности, энергии разлетающихся частиц в *ц*-системе отнюдь не имеют одного определенного значения. Существует, однако, верхний предел кинетической энергии, которую может при этом унести с собой каждая из распадных частиц.

Для определения этого предела будем рассматривать совокупность всех распадных частиц за исключением одной заданной (с массой m_1) как одну систему, ее «внутреннюю» энергию обозначим посредством $E'_{вн}$. Тогда кинетическая энергия частицы m_1 будет согласно (16,1), (16,2):

$$T_{10} = \frac{p_0^2}{2m_1} = \frac{M - m_1}{M}\left(E_{вн} - E_{1вн} - E'_{вн}\right)$$

(M — масса первичной частицы). Очевидно, что T_{10} будет иметь наибольшее возможное значение, когда $E'_{вн}$ минимальна. Для этого надо, чтобы все распадные частицы за исключением частицы m_1 двигались с одной и той же скоростью; тогда $E'_{н}$ сводится просто к сумме их внутренних энергий, а разность $E_{вн} - E_{1вн} - E'_{вн}$ есть энергия распада ε. Таким образом,

$$(T_{10})_{max} = \frac{M - m_1}{M}\varepsilon. \tag{16,9}$$

Задачи

1. Найти связь между углами вылета θ_1, θ_2 (в *л*-системе) распадных частиц при распаде на две частицы.

Решение. В *ц*-системе углы вылета обеих частиц связаны посредством $\theta_{10} = \pi - \theta_{20}$. Обозначая θ_{10} просто как θ_0 и применяя формулу (16,5) к каждой из двух частиц, пишем:

$$V + v_{10}\cos\theta_0 = v_{10}\sin\theta_0\operatorname{ctg}\theta_1,$$
$$V - v_{20}\cos\theta_0 = v_{20}\sin\theta_0\operatorname{ctg}\theta_2.$$

Из этих двух равенств надо исключить θ_0. Для этого определяем сначала из них $\cos\theta_0$ и $\sin\theta_0$, после чего составляем сумму $\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0 = 1$. Учитывая также, что $v_{10}/v_{20} = m_2/m_1$ и используя (16,2), найдем в результате следующее уравнение:

$$\frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta_2 + \frac{m_1}{m_2}\sin^2\theta_1 - 2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\theta_1 + \theta_2) = \frac{2\varepsilon}{(m_1 + m_2)V^2}\sin^2(\theta_1 + \theta_2).$$

2. Найти распределение распадных частиц по направлениям вылета в *л*-системе.

Решение. При $v_0 > V$ подставляем (16,6) со знаком плюс перед корнем в (16,7) и получаем искомое распределение в виде

$$\frac{\sin\theta\,d\theta}{2}\left[2\frac{V}{v_0}\cos\theta+\frac{1+\frac{V^2}{v_0^2}\cos 2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}}\right] \qquad (0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

При $v_0 < V$ надо учитывать обе возможные связи θ_0 с θ. Поскольку при увеличении θ одно из соответствующих ему значений θ_0 растет, а другое убывает, то надо взять разность (а не сумму) выражений $d\cos\theta_0$ с двумя знаками перед корнем в (16,6). В результате получим:

$$\sin\theta\,d\theta\frac{1+\frac{V^2}{v_0^2}\cos 2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}} \qquad (0\leqslant\theta\leqslant\theta_{max}).$$

3. Определить интервал значений, которые может иметь угол θ между направлениями вылета обеих распадных частиц в $л$-системе.

Решение. Угол θ есть сумма $\theta_1+\theta_2$ углов, определяющихся формулой (16,5) (см. задачу 1); проще всего вычисляется тангенс этого угла. Исследование экстремумов получающегося выражения приводит к следующим интервалам возможных значений θ в зависимости от относительной величины V и v_{10}, v_{20} (для определенности полагаем всегда $v_{20} > v_{10}$):

$$\begin{aligned} 0<\theta<\pi, &\quad \text{если}\quad v_{10}<V<v_{20};\\ \pi-\theta_m<\theta<\pi, &\quad \text{если}\quad V<v_{10};\\ 0<\theta<\theta_m, &\quad \text{если}\quad V>v_{20}, \end{aligned}$$

причем значение θ_m дается формулой

$$\sin\theta_m=\frac{V(v_{10}+v_{20})}{V^2+v_{10}v_{20}}.$$

§ 17. Упругие столкновения частиц

Столкновение двух частиц называют упругим, если оно не сопровождается изменением их внутреннего состояния. Соответственно этому при применении к такому столкновению закона сохранения энергии можно не учитывать внутренней энергии частиц.

Проще всего столкновение выглядит в системе отсчета, в которой центр инерции обеих частиц покоится ($ц$-система); будем отличать, как и в предыдущем параграфе, индексом 0 значения величин в этой системе. Скорости частиц до столкновения в $ц$-системе связаны с их скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ в лабораторной системе соотношениями

$$\mathbf{v}_{10}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v}, \qquad \mathbf{v}_{20}=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ (см. (13,2)).