Решение. При $v_0 > V$ подставляем (16,6) со знаком плюс перед корнем в (16,7) и получаем искомое распределение в виде

$$\frac{\sin\theta\, d\theta}{2}\left[2\frac{V}{v_0}\cos\theta+\frac{1+\frac{V^2}{v_0^2}\cos 2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}}\right] \qquad (0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

При $v_0 < V$ надо учитывать обе возможные связи θ_0 с θ. Поскольку при увеличении θ одно из соответствующих ему значений θ_0 растет, а другое убывает, то надо взять разность (а не сумму) выражений $d\cos\theta_0$ с двумя знаками перед корнем в (16,6). В результате получим:

$$\sin\theta\, d\theta\frac{1+\frac{V^2}{v_0^2}\cos 2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}} \qquad (0\leqslant\theta\leqslant\theta_{max}).$$

3. Определить интервал значений, которые может иметь угол θ между направлениями вылета обеих распадных частиц в *л*-системе.

Решение. Угол θ есть сумма $\theta_1+\theta_2$ углов, определяющихся формулой (16,5) (см. задачу 1); проще всего вычисляется тангенс этого угла. Исследование экстремумов получающегося выражения приводит к следующим интервалам возможных значений θ в зависимости от относительной величины V и v_{10}, v_{20} (для определенности полагаем всегда $v_{20} > v_{10}$):

$$\begin{aligned} 0<\theta<\pi, &\quad \text{если} \quad v_{10}<V<v_{20};\\ \pi-\theta_m<\theta<\pi, &\quad \text{если} \quad V<v_{10};\\ 0<\theta<\theta_m, &\quad \text{если} \quad V>v_{20},\end{aligned}$$

причем значение θ_m дается формулой

$$\sin\theta_m=\frac{V(v_{10}+v_{20})}{V^2+v_{10}v_{20}}.$$

§ 17. Упругие столкновения частиц

Столкновение двух частиц называют упругим, если оно не сопровождается изменением их внутреннего состояния. Соответственно этому при применении к такому столкновению закона сохранения энергии можно не учитывать внутренней энергии частиц.

Проще всего столкновение выглядит в системе отсчета, в которой центр инерции обеих частиц покоится (*ц*-система); будем отличать, как и в предыдущем параграфе, индексом 0 значения величин в этой системе. Скорости частиц до столкновения в *ц*-системе связаны с их скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ в лабораторной системе соотношениями

$$\mathbf{v}_{10}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v}, \qquad \mathbf{v}_{20}=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ (см. (13,2)).

В силу закона сохранения импульса импульсы обеих частиц остаются после столкновения равными по величине и противоположными по направлению, а в силу закона сохранения энергии остаются неизменными и их абсолютные величины. Таким образом, результат столкновения сводится в *ц*-системе к повороту скоростей обеих частиц, остающихся взаимно противоположными и неизменными по величине. Если обозначить посредством $\mathbf{n}_0$ единичный вектор в направлении скорости частицы m_1 после столкновения, то скорости обеих частиц после столкновения (отличаем их штрихом) будут:

$$\mathbf{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1+m_2} v\mathbf{n}_0, \quad \mathbf{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1+m_2} v\mathbf{n}_0. \tag{17,1}$$

Чтобы возвратиться к лабораторной системе отсчета, надо добавить к этим выражениям скорость $\mathbf{V}$ центра инерции. Таким образом, для скоростей частиц в *л*-системе после столкновения получаем:

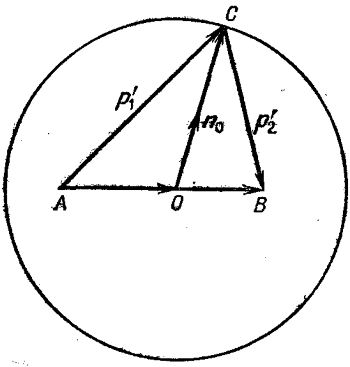
$$\mathbf{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} v\mathbf{n}_0 + \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2},$$
$$\mathbf{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2} v\mathbf{n}_0 + \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2}. \tag{17,2}$$

Этим исчерпываются сведения, которые можно получить о столкновении, исходя из одних только законов сохранения импульса и энергии. Что касается направления вектора $\mathbf{n}_0$, то он зависит от закона взаимодействия частиц и их взаимного расположения во время столкновения.

Полученные результаты можно интерпретировать геометрически. При этом удобнее перейти от скоростей к импульсам. Умножив равенства (17,2) соответственно на m_1 и m_2, получим:

$$\mathbf{p}'_1 = mv\mathbf{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2),$$
$$\mathbf{p}'_2 = -mv\mathbf{n}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2) \tag{17,3}$$

($m = m_1m_2/(m_1+m_2)$ — приведенная масса). Построим окружность с радиусом mv и произведем указанное на рис. 15 построение. Если единичный вектор $\mathbf{n}_0$ направлен вдоль $\overrightarrow{OC}$, то векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ дают соответственно импульсы $\mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}'_2$. При заданных $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ радиус окружности и положение точек A и B



$\overrightarrow{OC} = mv$; $\overrightarrow{AO} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(p_1+p_2)$; $\overrightarrow{OB} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(p_1+p_2)$

Рис. 15

неизменны, а точка C может иметь любое положение на окружности.

Рассмотрим подробнее случай, когда одна из частиц (пусть это будет частица m_2) до столкновения покоилась. В этом случае длина $OB = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1 = mv$ совпадает с радиусом, т. е. точка B лежит на окружности. Вектор же $\overrightarrow{AB}$ совпадает с импульсом $\mathbf{p}_1$ первой частицы до рассеяния. При этом точка A лежит внутри (если $m_1 < m_2$) или вне (если $m_1 > m_2$) окружности. Соответствующие диаграммы изображены на рис. 16, *а*

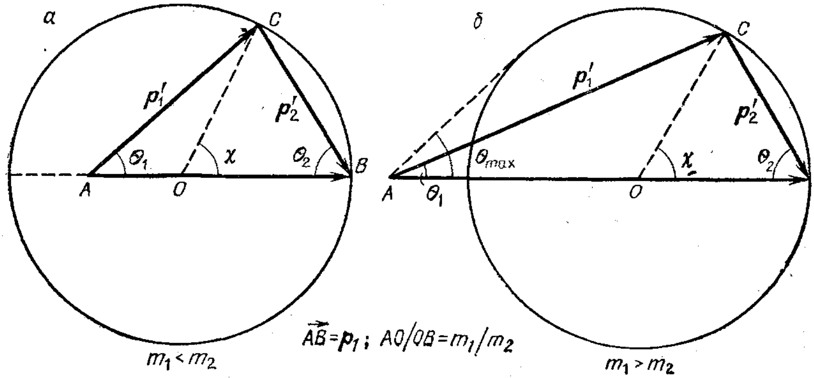


Рис. 16

и *б*. Указанные на них углы θ_1 и θ_2 представляют собой углы отклонения частиц после столкновения по отношению к направлению удара (направлению $\mathbf{p}_1$). Центральный же угол, обозначенный на рисунках посредством χ (дающий направление $\mathbf{n}_0$), представляет собой угол поворота первой частицы в системе центра инерции. Из рисунка очевидно, что углы θ_1 и θ_2 могут быть выражены через угол χ формулами

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}, \qquad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}. \qquad (17,4)$$

Выпишем также формулы, определяющие абсолютные величины скоростей обеих частиц после столкновения через тот же угол χ:

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \chi}}{m_1 + m_2} v, \qquad v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin \frac{\chi}{2}. \qquad (17,5)$$

Сумма $\theta_1 + \theta_2$ есть угол разлета частиц после столкновения. Очевидно, что $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$ при $m_1 < m_2$ и $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$ при $m_1 > m_2$.

Случаю, когда обе частицы после столкновения движутся по одной прямой («лобовой удар»), соответствует $\chi = \pi$, т. е. положение точки C на диаметре слева от точки A (рис. 16, *а*; при этом $\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2'$ взаимно противоположны) или между A и O (на рис. 16, *б*; при этом $\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2'$ направлены в одну сторону).

Скорости частиц после столкновения в этом случае равны

$$\mathbf{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v}. \qquad (17,6)$$

Значение $\mathbf{v}_2'$ при этом — наибольшее возможное; максимальная энергия, которую может получить в результате столкновения первоначально покоившаяся частица, равна, следовательно,

$$E'_{2\,\max} = \frac{m_2 v'^2_{2\,\max}}{2} = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1, \qquad (17,7)$$

где $E_1 = m_1 v_1^2/2$ — первоначальная энергия налетающей частицы.

При $m_1 < m_2$ скорость первой частицы после столкновения может иметь любое направление. Если же $m_1 > m_2$, угол отклонения летящей частицы не может превышать некоторого максимального значения, соответствующего такому положению точки C (рис. 16, *б*), при котором прямая AC касается окружности. Очевидно, что $\sin\theta_{1\,\max} = OC/OA$, или

$$\sin\theta_{1\,\max} = m_2/m_1. \qquad (17,8)$$

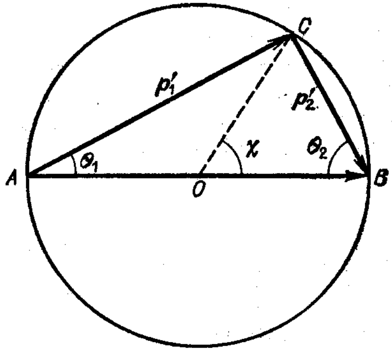


Рис. 17

Особенно просто выглядит столкновение частиц (из которых одна первоначально покоится) с одинаковыми массами. В этом случае не только точка B, но и точка A лежат на окружности (рис. 17). При этом

$$\theta_1 = \frac{\chi}{2}, \qquad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}, \qquad (17,9)$$

$$v_1' = v\cos\frac{\chi}{2}, \quad v_2' = v\sin\frac{\chi}{2}. \qquad (17,10)$$

Отметим, что частицы разлетаются после столкновения под прямым углом друг к другу.

Задача

Выразить скорости обеих частиц после столкновения движущейся частицы (m_1) с неподвижной (m_2) через их углы отклонения в *л*-системе.

Решение. Из рис. 16 имеем $p_2' = 2 \cdot OB \cdot \cos\theta_2$ или $v_2' = 2v \frac{m}{m_2} \cos\theta_2$. Для импульса же $p_1' = AC$ имеем уравнение

$$OC^2 = AO^2 + p_1'^2 - 2AO \cdot p_1' \cos\theta_1$$

или

$$\left(\frac{v_1'}{v}\right)^2 - \frac{2m}{m_2}\frac{v_1'}{v}\cos\theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{v_1'}{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cos\theta_1 \pm \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2\theta_1}$$

(при $m_1 > m_2$ перед корнем допустимы оба знака, при $m_2 > m_1$ — знак +).

§ 18. Рассеяние частиц

Как было уже указано в предыдущем параграфе, полное определение результата столкновения двух частиц (определение угла χ) требует решения уравнений движения с учетом конкретного закона взаимодействия частиц.

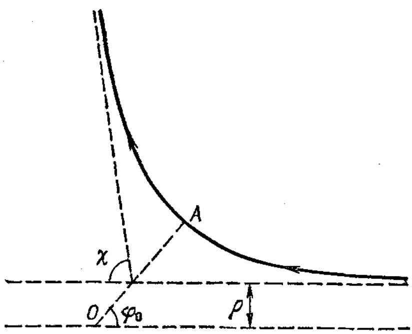


Рис. 18

В соответствии с общим правилом будем рассматривать сначала эквивалентную задачу об отклонении одной частицы с массой m в поле $U(r)$ неподвижного силового центра (расположенного в центре инерции частиц).

Как было указано в § 14, траектория частицы в центральном поле симметрична по отношению к прямой, проведенной в ближайшую к центру точку орбиты (OA на рис. 18). Поэтому обе асимптоты орбиты пересекают указанную прямую под одинаковыми углами. Если обозначить эти углы посредством φ_0, то угол χ отклонения частицы при ее пролете мимо центра есть, как видно из рисунка,

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|. \tag{18,1}$$

Угол же φ_0 определяется согласно (14,7) интегралом

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m\,[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}, \tag{18,2}$$