Решение. Из рис. 16 имеем $p_2' = 2\cdot OB\cdot\cos\theta_2$ или $v_2' = 2v\dfrac{m}{m_2}\cos\theta_2$. Для импульса же $p_1' = AC$ имеем уравнение

$$OC^2 = AO^2 + p_1'^2 - 2AO\cdot p_1'\cos\theta_1$$

или

$$\left(\frac{v_1'}{v}\right)^2 - \frac{2m}{m_2}\frac{v_1'}{v}\cos\theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{v_1'}{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cos\theta_1 \pm \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{m_2^2 - m_1^2\sin^2\theta_1}$$

(при $m_1 > m_2$ перед корнем допустимы оба знака, при $m_2 > m_1$ — знак $+$).

§ 18. Рассеяние частиц

Как было уже указано в предыдущем параграфе, полное определение результата столкновения двух частиц (определение угла χ) требует решения уравнений движения с учетом конкретного закона взаимодействия частиц.

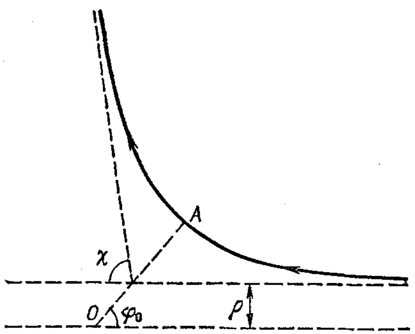

Рис. 18

В соответствии с общим правилом будем рассматривать сначала эквивалентную задачу об отклонении одной частицы с массой m в поле $U(r)$ неподвижного силового центра (расположенного в центре инерции частиц).

Как было указано в § 14, траектория частицы в центральном поле симметрична по отношению к прямой, проведенной в ближайшую к центру точку орбиты (OA на рис. 18). Поэтому обе асимптоты орбиты пересекают указанную прямую под одинаковыми углами. Если обозначить эти углы посредством φ_0, то угол χ отклонения частицы при ее пролете мимо центра есть, как видно из рисунка,

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|. \tag{18,1}$$

Угол же φ_0 определяется согласно (14,7) интегралом

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m\,[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}, \tag{18,2}$$

взятым между ближайшим к центру и бесконечно удаленным положениями частицы. Напомним, что $r_{\min}$ является корнем выражения, стоящего под знаком радикала.

При инфинитном движении, с которым мы имеем здесь дело, удобно ввести вместо постоянных E и M другие — скорость v_∞ частицы на бесконечности и так называемое *прицельное расстояние* ρ. Последнее представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из центра на направление $\mathbf{v}_\infty$, т. е. расстояние, на котором частица прошла бы мимо центра, если бы силовое поле отсутствовало (рис. 18). Энергия и момент выражаются через эти величины согласно

$$E = mv_\infty^2/2, \quad M = m\rho v_\infty, \tag{18,3}$$

а формула (18,2) принимает вид

$$\varphi_0 = \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \dfrac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\rho^2}{r^2} - \dfrac{2U}{mv_\infty^2}}}. \tag{18,4}$$

Вместе с (18,1) она определяет зависимость χ от ρ.

В физических применениях приходится обычно иметь дело не с индивидуальным отклонением частицы, а, как говорят, с *рассеянием* целого пучка одинаковых частиц, падающих на рассеивающий центр с одинаковой скоростью $\mathbf{v}_\infty$. Различные частицы в пучке обладают различными прицельными расстояниями и соответственно рассеиваются под различными углами χ. Обозначим посредством dN число частиц, рассеиваемых в единицу времени на углы, лежащие в интервале между χ и $\chi + d\chi$. Само по себе это число неудобно для характеристики процесса рассеяния, так как оно зависит от плотности падающего пучка (пропорционально ей). Поэтому введем отношение

$$d\sigma = dN/n, \tag{18,5}$$

где n — число частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка (мы предполагаем, естественно, что пучок однороден по всему своему сечению). Это отношение имеет размерность площади и называется *эффективным сечением рассеяния*. Оно всецело определяется видом рассеивающего поля и является важнейшей характеристикой процесса рассеяния.

Будем считать, что связь между χ и ρ — взаимно однозначна; это так, если угол рассеяния является монотонно убывающей функцией прицельного расстояния. В таком случае рассеиваются в заданный интервал углов между χ и $\chi + d\chi$ лишь те частицы, которые летят с прицельным расстоянием в определенном интервале между $\rho(\chi)$ и $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$. Число таких частиц равно произведению n на площадь кольца между окружностями с радиусами ρ и $\rho + d\rho$, т. е. $dN = 2\pi\rho\, d\rho \cdot n$. Поэтому эффективное сечение

$$d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho. \tag{18,6}$$

Чтобы найти зависимость эффективного сечения от угла рассеяния, достаточно переписать это выражение в виде

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi. \tag{18,7}$$

Мы пишем здесь абсолютное значение производной $d\rho/d\chi$, имея в виду, что она может быть отрицательной (как это обычно бывает) [1]. Часто относят $d\sigma$ не к элементу плоского угла $d\chi$, а к элементу телесного угла do. Телесный угол между конусами с углами раствора χ и $\chi + d\chi$ есть $do = 2\pi \sin\chi\, d\chi$. Поэтому имеем из (18,7):

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| do. \tag{18,8}$$

Возвращаясь к фактической задаче о рассеянии пучка частиц не на неподвижном силовом центре, а на других первоначально покоившихся частицах, мы можем сказать, что формула (18,7) определяет эффективное сечение в зависимости от угла рассеяния в системе центра инерции. Для нахождения же эффективного сечения в зависимости от угла рассеяния θ в лабораторной системе надо выразить в этой формуле χ через θ согласно формулам (17,4). При этом получаются выражения как для сечения рассеяния падающего пучка частиц (χ выражено через θ_1), так и для частиц, первоначально покоившихся (χ выражено через θ_2).

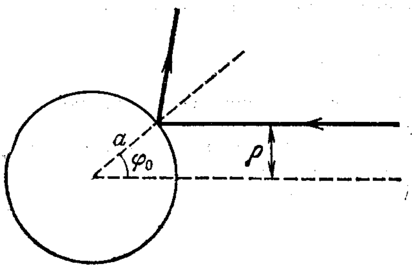

Рис. 19

Задачи

1. Определить эффективное сечение рассеяния частиц от абсолютно твердого шарика радиуса a (т. е. при законе взаимодействия $U = \infty$ при $r < a$ и $U = 0$ при $r > a$).

Решение. Так как вне шарика частица движется свободно, а внутрь него проникнуть вообще не может, то траектория складывается из двух прямых, расположенных симметрично относительно радиуса, проведенного в точку их пересечения с шариком (рис. 19). Как видно из рисунка,

$$\rho = a \sin\varphi_0 = a \sin\frac{\pi - \chi}{2} = a \cos\frac{\chi}{2}.$$

[1]) Если функция $\rho(\chi)$ многозначна, то надо, очевидно, взять сумму таких выражений по всем ветвям этой функции.

Подставляя в (18,7) или (18,8), получим:

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi d\chi = \frac{a^2}{4} do, \qquad (1)$$

т. е. в $ц$-системе рассеяние изотропно. Интегрируя $d\sigma$ по всем углам, найдем, что полное сечение $\sigma = \pi a^2$ в соответствии с тем, что *прицельная площадь*, в которую должна попасть частица для того, чтобы вообще рассеяться, есть площадь сечения шарика.

Для перехода к $л$-системе надо выразить χ через θ_1 согласно (17,4). Вычисления полностью аналогичны произведенным в задаче 2 § 16 (ввиду формального сходства формул (17,4) и (16,5)). При $m_1 < m_2$ (m_1 — масса частиц, m_2 — масса шариков) получим:

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4} \left[2\frac{m_1}{m_2} \cos\theta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2}\cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\theta_1}} \right] do_1$$

($do_1 = 2\pi \sin\theta_1 d\theta_1$). Если же $m_2 < m_1$, то

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{2} \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2}\cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\theta_1}} do_1.$$

При $m_1 = m_2$ имеем:

$$d\sigma_1 = a^2 |\cos\theta_1| do_1,$$

что можно получить и прямой подстановкой $\chi = 2\theta_1$ (согласно (17,9)) в (1).

Для первоначально покоившихся шариков имеем всегда $\chi = \pi - 2\theta_2$, и подстановка в (1) дает:

$$d\sigma_2 = a^2 |\cos\theta_2| do_2.$$

2. Для того же случая выразить эффективное сечение как функцию энергии ε, теряемой рассеиваемыми частицами.

Решение. Энергия, теряемая частицей m_1, совпадает с энергией, приобретаемой частицей m_2. Согласно (17,5) и (17,7) имеем:

$$\varepsilon = E_2' = \frac{2m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_\infty^2 \sin^2\frac{\chi}{2} = \varepsilon_{max} \sin^2\frac{\chi}{2},$$

откуда

$$d\varepsilon = {}^1/_2 \varepsilon_{max} \sin\chi\, d\chi,$$

и, подставляя в формулу (1) задачи 1, получим:

$$d\sigma = \pi a^2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{max}}.$$

Распределение рассеянных частиц по значениям ε оказывается однородным во всем интервале ε от нуля до ε_{max}.

3. Как зависит эффективное сечение от скорости v_∞ частиц при рассеянии в поле $U \infty r^{-n}$?

Решение. Согласно (10,3), если потенциальная энергия есть однородная функция порядка $k = -n$, то для подобных траекторий $\rho \propto v^{-2/n}$ или

$$\rho = v_\infty^{-2/n} f(\chi)$$

(углы отклонения χ для подобных траекторий одинаковы). Подставляя в (18,6), найдем, что

$$d\sigma \propto v_\infty^{-4/n}\, do.$$

4. Определить эффективное сечение для «падения» частиц на центр поля $U = -\alpha/r^2$.

Решение. «Падают» на центр те частицы, для которых выполняется условие $2\alpha > m\rho^2 v_\infty^2$ (см. (14,11)), т. е. у которых прицельное расстояние не превышает значения $\rho_{max} = \sqrt{2\alpha/mv_\infty^2}$. Поэтому искомое эффективное сечение

$$\sigma = \pi\rho_{max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2}.$$

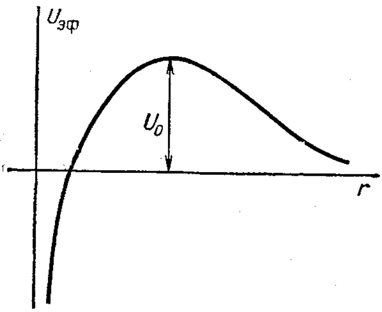

Рис. 20

5. То же в поле $U = -\alpha/r^n$ ($n > 2$, $\alpha > 0$).

Решение. Зависимость эффективной потенциальной энергии

$$U_{эфф} = \frac{m\rho^2 v_\infty^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$$

от r имеет вид, изображенный на рис. 20 с максимальным значением

$$(U_{эфф})_{max} = U_0 = \frac{(n-2)\alpha}{2}\left(\frac{m\rho^2 v_\infty^2}{\alpha n}\right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

«Падают» на центр те частицы, у которых $U_0 < E$. Определяя ρ_{max} из условия $U_0 = E$, получим:

$$\sigma = \pi n (n-2)^{\frac{2-n}{n}} \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

6. Определить эффективное сечение для падения частиц (с массами m_1) на поверхность сферического тела (с массой m_2 и радиусом R), к которой они притягиваются по закону Ньютона.

Решение. Условие падения заключается в неравенстве $r_{min} < R$, где r_{min} — ближайшая к центру сферы точка траектории частицы. Наибольшее допустимое значение ρ определяется условием $r_{min} = R$, что сводится к решению уравнения $U_{эфф}(R) = E$ или

$$\frac{m_1 v_\infty^2 \rho_{max}^2}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2},$$

причем $\alpha = \gamma m_1 m_2$ (γ — гравитационная постоянная), и мы положили $m \approx m_1$, считая, что $m_2 \gg m_1$. Находя отсюда ρ^2_{max}, получим:

$$\sigma = \pi R^2 \left(1 + \frac{2\gamma m_2}{R v_\infty^2}\right).$$

При $v_\infty \to \infty$ эффективное сечение стремится, естественно, к геометрической площади сечения сферы.

7. Восстановить вид рассеивающего поля $U(r)$ по заданной зависимости эффективного сечения от угла рассеяния при заданной энергии E; предполагается, что $U(r)$ — монотонно убывающая функция r (поле отталкивания), причем $U(0) > E$, $U(\infty) = 0$. (*О. Б. Фирсов*, 1953.)

Решение. Интегрирование $d\sigma$ по углу рассеяния определяет согласно формуле

$$\int\limits_\chi^\pi \frac{d\sigma}{d\chi} d\chi = \pi\rho^2 \tag{1}$$

квадрат прицельного расстояния, так что функцию $\rho(\chi)$ (а с ней и $\chi(\rho)$) тоже можно считать заданной.

Вводим обозначения:

$$s = 1/r, \qquad x = 1/\rho^2, \qquad w = \sqrt{1 - U/E}. \tag{2}$$

Тогда формулы (18,1), (18,2) запишутся в виде

$$\frac{\pi - \chi(x)}{2} = \int\limits_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{xw^2 - s^2}}, \tag{3}$$

где $s_0(x)$ — корень уравнения

$$xw^2(s_0) - s_0^2 = 0.$$

Уравнение (3) — интегральное уравнение для функции $w(s)$; его можно решить методом, аналогичным использованному в § 12. Разделив обе стороны (3) на $\sqrt{\alpha - x}$ и проинтегрировав по dx в пределах от нуля до α, найдем:

$$\int\limits_0^\alpha \frac{\pi - \chi(x)}{2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}} = \int\limits_0^\alpha \int\limits_0^{s_0(x)} \frac{ds\, dx}{\sqrt{(xw^2 - s^2)(\alpha - x)}} =$$

$$= \int\limits_0^{s_0(\alpha)} \int\limits_{x(s_0)}^\alpha \frac{dx\, ds}{\sqrt{(xw^2 - s^2)(\alpha - x)}} = \pi \int\limits_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{w}.$$

или, интегрируя по частям в левой стороне равенства:

$$\pi\sqrt{\alpha} - \int\limits_0^\alpha \sqrt{\alpha - x}\, \frac{d\chi}{dx} dx = \pi \int\limits_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{w}.$$

Полученное соотношение дифференцируем по α, после чего вместо $s_0(\alpha)$ пишем просто s, соответственно чему заменяем α на s^2/w^2; написав равенство в дифференциалах, получим:

$$\pi d\left(\frac{s}{w}\right)-\frac{1}{2}d\left(\frac{s^2}{w^2}\right)\int\limits_0^{s^2/w^2}\frac{\chi'(x)\,dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2}-x}}=\frac{\pi}{w}\,ds$$

или

$$-\pi d\ln w=d\left(\frac{s}{w}\right)\int\limits_0^{s^2/w^2}\frac{\chi'(x)\,dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2}-x}}.$$

Это уравнение интегрируется непосредственно, причем в правой стороне следует изменить порядок интегрирования по dx и $d(s/w)$. Учитывая, что при $s=0$ (т. е. $r\to\infty$) должно быть $w=1$ (т. е. $U=0$), и возвращаясь к исходным переменным r и ρ, получим окончательный результат (в двух эквивалентных формах):

$$w=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{rw}^{\infty}\operatorname{Arch}\frac{\rho}{rw}\cdot\frac{d\chi}{d\rho}\,d\rho\right\}=\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int\limits_{rw}^{\infty}\frac{\chi(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2w^2}}\right\}. \tag{4}$$

Этой формулой определяется в неявном виде зависимость $w(r)$ (а тем самым и $U(r)$) при всех $r>r_{\min}$, т. е. в той области значений r, которая фактически проходится рассеиваемой частицей с заданной энергией E.

§ 19. Формула Резерфорда

Одно из важнейших применений полученных выше формул — рассеяние заряженных частиц в кулоновском поле.

Положив в (18,4) $U=\alpha/r$ и производя элементарное интегрирование, получим:

$$\varphi_0=\arccos\frac{\alpha/mv_\infty^2\rho}{\sqrt{1+\left(\alpha/mv_\infty^2\rho\right)^2}},$$

откуда

$$\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\operatorname{tg}^2\varphi_0,$$

или, вводя согласно (18,1) $\varphi_0=(\pi-\chi)/2$:

$$\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\operatorname{ctg}^2\frac{\chi}{2}. \tag{19,1}$$

Дифференцируя это выражение по χ и подставляя в (18,7) или в (18,8), получим:

$$d\sigma=\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}}\,d\chi \tag{19,2}$$

или

$$d\sigma=\left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2\frac{do}{\sin^4\frac{\chi}{2}}. \tag{19,3}$$