в дифференциалах, получим:

$$\pi d\left(\frac{s}{w}\right)-\frac{1}{2}d\left(\frac{s^2}{w^2}\right)\int_0^{s^2/w^2}\frac{\chi'(x)\,dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2}-x}}=\frac{\pi}{w}\,ds$$

или

$$-\pi d\ln w=d\left(\frac{s}{w}\right)\int_0^{s^2/w^2}\frac{\chi'(x)\,dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2}-x}}.$$

Это уравнение интегрируется непосредственно, причем в правой стороне следует изменить порядок интегрирования по $dx$ и $d(s/w)$. Учитывая, что при $s=0$ (т. е. $r\to\infty$) должно быть $w=1$ (т. е. $U=0$), и возвращаясь к исходным переменным $r$ и $\rho$, получим окончательный результат (в двух эквивалентных формах):

$$w=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty}\operatorname{Arch}\frac{\rho}{rw}\cdot\frac{d\chi}{d\rho}\,d\rho\right\}=\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty}\frac{\chi(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2w^2}}\right\}. \quad (4)$$

Этой формулой определяется в неявном виде зависимость $w(r)$ (а тем самым и $U(r)$) при всех $r>r_{\min}$, т. е. в той области значений $r$, которая фактически проходится рассеиваемой частицей с заданной энергией $E$.

## § 19. Формула Резерфорда

Одно из важнейших применений полученных выше формул — рассеяние заряженных частиц в кулоновском поле.

Положив в (18,4) $U=\alpha/r$ и производя элементарное интегрирование, получим:

$$\varphi_0=\arccos\frac{\alpha/mv_\infty^2\rho}{\sqrt{1+(\alpha/mv_\infty^2\rho)^2}},$$

откуда

$$\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\operatorname{tg}^2\varphi_0,$$

или, вводя согласно (18,1) $\varphi_0=(\pi-\chi)/2$:

$$\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\operatorname{ctg}^2\frac{\chi}{2}. \quad (19,1)$$

Дифференцируя это выражение по $\chi$ и подставляя в (18,7) или в (18,8), получим:

$$d\sigma=\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}}\,d\chi \quad (19,2)$$

или

$$d\sigma=\left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2\frac{do}{\sin^4\frac{\chi}{2}}. \quad (19,3)$$

Это так называемая *формула Резерфорда*. Отметим, что эффективное сечение не зависит от знака $\alpha$, так что полученный результат относится в равной степени к кулоновскому полю отталкивания и притяжения.

Формула (19,3) дает эффективное сечение в системе отсчета, в которой покоится центр инерции сталкивающихся частиц. Преобразование к лабораторной системе производится с помощью формул (17,4). Для частиц, первоначально покоившихся, подставляя $\chi = \pi - 2\theta_2$ в (19,2), получим:

$$d\sigma_2 = 2\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\sin\theta_2}{\cos^3\theta_2}\,d\theta_2 = \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{do_2}{\cos^3\theta_2}. \qquad (19,4)$$

Для падающих же частиц преобразование приводит в общем случае к весьма громоздкой формуле. Отметим лишь два частных случая.

Если масса $m_2$ рассеивающей частицы велика по сравнению с массой $m_1$ рассеиваемой частицы, то $\chi \approx \theta_1$, а $m \approx m_1$, так что

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2 \frac{do_1}{\sin^4\frac{\theta_1}{2}}, \qquad (19,5)$$

где $E_1 = m_1 v_\infty^2/2$ — энергия падающей частицы.

Если массы обеих частиц одинаковы ($m_1 = m_2$, $m = m_1/2$), то согласно (17,9) $\chi = 2\theta_1$, и подстановка в (19,2) дает:

$$d\sigma_1 = 2\pi\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1}\,d\theta_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^4\theta_1}\,do_1. \qquad (19,6)$$

Если не только массы обеих частиц равны, но эти частицы вообще тождественны, то не имеет смысла различать после рассеяния первоначально двигавшиеся частицы от первоначально покоившихся. Общее эффективное сечение для всех частиц мы получим, складывая $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ и заменяя $\theta_1$ и $\theta_2$ общим значением $\theta$:

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta}\right)\cos\theta\,do. \qquad (19,7)$$

Вернемся снова к общей формуле (19,2) и определим с ее помощью распределение рассеянных частиц по отношению к теряемой ими в результате столкновения энергии. При произвольном соотношении между массами рассеиваемой ($m_1$) и рассеивающей ($m_2$) частиц, приобретаемая последней скорость выражается через угол рассеяния в $ц$-системе посредством

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_\infty \sin\frac{\chi}{2}$$

(см. (17,5)). Соответственно, приобретаемая этой частицей, а тем самым и теряемая частицей $m_1$ энергия равна

$$\varepsilon = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{2m^2}{m_2} v_\infty^2 \sin^2\frac{\chi}{2}.$$

Выразив отсюда $\sin\frac{\chi}{2}$ через $\varepsilon$ и подставив в (19,2), получаем:

$$d\sigma = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}. \qquad (19,8)$$

Эта формула отвечает на поставленный вопрос, определяя эффективное сечение как функцию от потери энергии $\varepsilon$; последняя пробегает при этом значения от нуля до $\varepsilon_{max} = 2m^2 v_\infty^2/m_2$.

### Задачи

1. Найти эффективное сечение рассеяния в поле $U = \alpha/r^2$ $(\alpha > 0)$.

Решение. Угол отклонения:

$$\chi = \pi\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha/m\rho^2 v_\infty^2}}\right].$$

Эффективное сечение

$$d\sigma = \frac{2\pi^2\alpha}{mv_\infty^2}\frac{\pi-\chi}{\chi^2(2\pi-\chi)^2}\frac{do}{\sin\chi}.$$

2. Найти эффективное сечение рассеяния сферической «потенциальной ямой» радиуса $a$ и «глубины» $U_0$ (т. е. полем $U = 0$ при $r > a$, $U = -U_0$ при $r < a$).

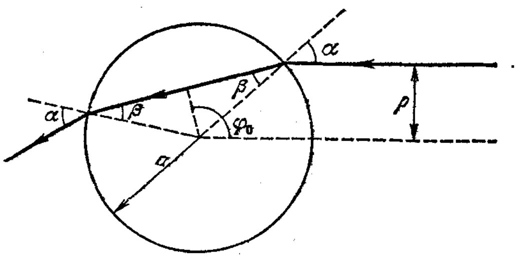


Рис. 21

Решение. Прямолинейная траектория частицы «преломляется» при входе в яму и при выходе из нее. Согласно задаче к § 7 углы падения $\alpha$ и преломления $\beta$ (рис. 21) связаны соотношением

$$\sin\alpha/\sin\beta = n, \qquad n = \sqrt{1 + 2U_0/mv_\infty^2}.$$

Угол отклонения $\chi = 2(\alpha - \beta)$. Поэтому имеем:

$$\frac{\sin(\alpha - \chi/2)}{\sin\alpha} = \cos\frac{\chi}{2} - \operatorname{ctg}\alpha\sin\frac{\chi}{2} = \frac{1}{n}.$$

Исключив $\alpha$ из этого равенства и очевидного из рисунка соотношения

$$a \sin \alpha = \rho,$$

получим связь между $\rho$ и $\chi$ в виде

$$\rho^2 = a^2 \frac{n^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}}{n^2 + 1 - 2n \cos \frac{\chi}{2}}.$$

Наконец, дифференцируя это равенство, получим эффективное сечение

$$d\sigma = \frac{a^2 n^2}{4 \cos \frac{\chi}{2}} \frac{\left(n \cos \frac{\chi}{2} - 1\right)\left(n - \cos \frac{\chi}{2}\right)}{\left(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\chi}{2}\right)^2} do.$$

Угол $\chi$ меняется в пределах от нуля (при $\rho = 0$) до значения $\chi_{max}$ (при $\rho = a$), определяемого из

$$\cos \frac{\chi_{max}}{2} = \frac{1}{n}.$$

Полное эффективное сечение, получающееся интегрированием $d\sigma$ по всем углам внутри конуса $\chi < \chi_{max}$, равно, разумеется, площади геометрического сечения $\pi a^2$.

## § 20. Рассеяние под малыми углами

Вычисление эффективного сечения значительно упрощается, если рассматривать лишь те столкновения, которые происходят на больших прицельных расстояниях, где поле $U$ является слабым, так что углы отклонения соответственно малы. При этом вычисление можно производить сразу в лабораторной системе отсчета, не вводя систему центра инерции.

Выберем ось $x$ по направлению первоначального импульса рассеиваемых частиц (частицы $m_1$), а плоскость $xy$ — в плоскости рассеяния. Обозначив посредством $\mathbf{p}_1'$ импульс частицы после рассеяния, имеем очевидное равенство

$$\sin \theta_1 = p_{1y}'/p_1'.$$

Для малых отклонений можно приближенно заменить $\sin \theta_1$ на $\theta_1$, а в знаменателе — заменить $p_1'$ первоначальным импульсом $p_1 = m_1 v_\infty$:

$$\theta_1 \approx p_{1y}'/m_1 v_\infty. \tag{20,1}$$

Далее, поскольку $\dot{p}_y = F_y$, то полное приращение импульса вдоль оси $y$

$$p_{1y}' = \int_{-\infty}^{\infty} F_y \, dt. \tag{20,2}$$