Исключив α из этого равенства и очевидного из рисунка соотношения

$$a \sin \alpha = \rho,$$

получим связь между ρ и χ в виде

$$\rho^2 = a^2 \frac{n^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}}{n^2 + 1 - 2n \cos \frac{\chi}{2}}.$$

Наконец, дифференцируя это равенство, получим эффективное сечение

$$d\sigma = \frac{a^2 n^2}{4 \cos \frac{\chi}{2}} \frac{\left(n \cos \frac{\chi}{2} - 1\right)\left(n - \cos \frac{\chi}{2}\right)}{\left(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\chi}{2}\right)^2} do.$$

Угол χ меняется в пределах от нуля (при $\rho = 0$) до значения χ_{max} (при $\rho = a$), определяемого из

$$\cos \frac{\chi_{max}}{2} = \frac{1}{n}.$$

Полное эффективное сечение, получающееся интегрированием $d\sigma$ по всем углам внутри конуса $\chi < \chi_{max}$, равно, разумеется, площади геометрического сечения πa^2.

§ 20. Рассеяние под малыми углами

Вычисление эффективного сечения значительно упрощается, если рассматривать лишь те столкновения, которые происходят на больших прицельных расстояниях, где поле U является слабым, так что углы отклонения соответственно малы. При этом вычисление можно производить сразу в лабораторной системе отсчета, не вводя систему центра инерции.

Выберем ось x по направлению первоначального импульса рассеиваемых частиц (частицы m_1), а плоскость xy — в плоскости рассеяния. Обозначив посредством $\mathbf{p}_1'$ импульс частицы после рассеяния, имеем очевидное равенство

$$\sin \theta_1 = p_{1y}'/p_1'.$$

Для малых отклонений можно приближенно заменить $\sin \theta_1$ на θ_1, а в знаменателе — заменить p_1' первоначальным импульсом $p_1 = m_1 v_\infty$;

$$\theta_1 \approx p_{1y}'/m_1 v_\infty. \tag{20,1}$$

Далее, поскольку $\dot{p}_y = F_y$, то полное приращение импульса вдоль оси y

$$p_{1y}' = \int_{-\infty}^{\infty} F_y \, dt. \tag{20,2}$$

При этом сила:

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{dU}{dr}\frac{y}{r}.$$

Поскольку интеграл (20,2) уже содержит малую величину U, то при его вычислении можно в том же приближении считать, что частица вовсе не отклоняется от своего первоначального пути, т. е. движется прямолинейно (вдоль прямой $y=\rho$) и равномерно (со скоростью v_∞). Соответственно этому полагаем в (20,2)

$$F_y = -\frac{dU}{dr}\frac{\rho}{r}, \qquad dt = \frac{dx}{v_\infty}$$

и получаем:

$$p'_{1y} = -\frac{\rho}{v_\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dU}{dr}\frac{dx}{r}.$$

Наконец, от интегрирования по dx перейдем к интегрированию по dr. Поскольку для прямолинейного пути $r^2 = x^2+\rho^2$, то при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ r изменяется от ∞ до ρ и затем снова до ∞. Поэтому интеграл по dx перейдет в удвоенный интеграл по dr от ρ до ∞, причем dx заменяется на

$$dx = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}.$$

Окончательно получим для угла рассеяния (20,1) следующее выражение[1]:

$$\theta_1 = -\frac{2\rho}{m_1 v_\infty^2}\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{dU}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}, \tag{20,3}$$

чем и определяется искомая зависимость θ_1 от ρ при слабом отклонении. Эффективное сечение рассеяния (в *л*-системе) получается по такой же формуле, как (18,8) (с θ_1 вместо χ), причем $\sin\theta_1$ можно и здесь заменить на θ_1:

$$d\sigma = \left|\frac{d\rho}{d\theta_1}\right|\frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1}\,do_1. \tag{20,4}$$

---

[1]) Если произвести весь изложенный вывод в *ц*-системе, то мы получим для χ такое же выражение с m вместо m_1 в соответствии с тем, что малые углы θ_1 и χ должны быть связаны согласно (17,4) соотношением

$$\theta_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\chi.$$

Задачи

1. Получить формулу (20,3) из формулы (18,4).

Решение. С целью избежать ниже фиктивно расходящихся интегралов, представим формулу (18,4) в виде

$$\varphi_0 = -\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{r_{\min}}^{R}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U}{mv_\infty^2}}\,dr,$$

причем в качестве верхнего предела пишем большую конечную величину R, имея в виду перейти затем к пределу $R\to\infty$. Ввиду малости U разлагаем корень по степеням U, а $r_{\min}$ заменяем приближенно на ρ:

$$\varphi_0 = \int_{\rho}^{R}\frac{\rho\,dr}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}} + \frac{\partial}{\partial\rho}\int_{\rho}^{\infty}\frac{U(r)\,dr}{mv_\infty^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}}.$$

Первый интеграл после перехода к пределу $R\to\infty$ дает $\pi/2$. Второй же интеграл предварительно преобразуем по частям и получаем выражение

$$\chi = \pi - 2\varphi_0 = 2\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{\rho}^{\infty}\frac{\sqrt{r^2-\rho^2}}{mv_\infty^2}\frac{dU}{dr}\,dr = -\frac{2\rho}{mv_\infty^2}\int_{\rho}^{\infty}\frac{dU}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}},$$

эквивалентное формуле (20,3).

2. Определить эффективное сечение рассеяния на малые углы в поле $U = \alpha/r^n$ $(n > 0)$.

Решение. Согласно (20,3) имеем:

$$\theta_1 = \frac{2\rho\alpha n}{m_1 v_\infty^2}\int_{\rho}^{\infty}\frac{dr}{r^{n+1}\sqrt{r^2-\rho^2}}.$$

Подстановкой $\rho^2/r^2 = u$ интеграл приводится к B-интегралу Эйлера и выражается через Г-функции

$$\theta_1 = \frac{2\alpha\sqrt{\pi}}{m_1 v_\infty^2\rho^n}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Выражая отсюда ρ через θ_1 и подставляя в (20,4), получим:

$$d\sigma = \frac{1}{n}\left[\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\alpha}{m_1 v_\infty^2}\right]^{\frac{2}{n}}\theta_1^{-2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\,do_1.$$