ГЛАВА V

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 21. Свободные одномерные колебания

Очень распространенный тип движения механических систем представляют собой так называемые *малые колебания*, которые система совершает вблизи своего положения устойчивого равновесия. Рассмотрение этих движений мы начнем с наиболее простого случая, когда система имеет всего одну степень свободы.

Устойчивому равновесию соответствует такое положение системы, в котором ее потенциальная энергия $U(q)$ имеет минимум; отклонение от такого положения приводит к возникновению силы $-dU/dq$, стремящейся вернуть систему обратно. Обозначим соответствующее значение обобщенной координаты посредством q_0. При малых отклонениях от положения равновесия в разложении разности $U(q)-U(q_0)$ по степеням $q-q_0$ достаточно сохранить первый неисчезающий член. В общем случае таковым является член второго порядка

$$U(q)-U(q_0)\approx\frac{k}{2}(q-q_0)^2,$$

где k — положительный коэффициент (значение второй производной $U''(q)$ при $q=q_0$). Будем в дальнейшем отсчитывать потенциальную энергию от ее минимального значения (т. е. положим $U(q_0)=0$) и введем обозначение

$$x=q-q_0 \tag{21,1}$$

для отклонения координаты от ее равновесного значения. Таким образом,

$$U(x)=kx^2/2. \tag{21,2}$$

Кинетическая энергия системы с одной степенью свободы имеет в общем случае вид

$$\tfrac{1}{2}a(q)\dot{q}^2=\tfrac{1}{2}a(q)\dot{x}^2.$$

В том же приближении достаточно заменить функцию $a(q)$ просто ее значением при $q=q_0$. Вводя для краткости обозначение[1])

$$a(q_0)=m,$$

[1]) Подчеркнем, однако, что величина m совпадает с массой только, если x есть декартова координата частицы!

получим окончательно следующее выражение для лагранжевой функции системы, совершающей одномерные малые колебания [1]:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \qquad (21,3)$$

Соответствующее этой функции уравнение движения гласит:

$$m\ddot{x} + kx = 0, \qquad (21,4)$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad (21,5)$$

где введено обозначение

$$\omega = \sqrt{k/m}. \qquad (21,6)$$

Два независимых решения линейного дифференциального уравнения (21,5): $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, так что его общее решение

$$x = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t. \qquad (21,7)$$

Это выражение может быть написано также и в виде

$$x = a\cos(\omega t + \alpha). \qquad (21,8)$$

Поскольку $\cos(\omega t + \alpha) = \cos\omega t\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha$, то сравнение с (21,7) показывает, что произвольные постоянные a и α связаны с постоянными c_1 и c_2 соотношениями

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = -c_2/c_1. \qquad (21,9)$$

Таким образом, вблизи положения устойчивого равновесия система совершает гармоническое колебательное движение. Коэффициент a при периодическом множителе в (21,8) называется *амплитудой* колебаний, а аргумент косинуса — их *фазой*; α есть начальное значение фазы, зависящее, очевидно, от выбора начала отсчета времени. Величина ω называется *циклической частотой* колебаний; в теоретической физике, впрочем, ее называют обычно просто *частотой*, что мы и будем делать в дальнейшем.

Частота является основной характеристикой колебаний, не зависящей от начальных условий движения. Согласно формуле (21,6) она всецело определяется свойствами механической системы как таковой. Подчеркнем, однако, что это свойство частоты связано с предполагаемой малостью колебаний и исчезает при переходе к более высоким приближениям. С математической точки зрения оно связано с квадратичной зависимостью потенциальной энергии от координаты [2].

---

[1]) Такую систему часто называют одномерным *осциллятором*.

[2]) Оно не имеет поэтому места, если у функции $U(x)$ при $x = 0$ минимум более высокого порядка, т. е. $U \propto x^n$, $n > 2$ (см. задачу 2а, § 11).

Энергия системы, совершающей малые колебания, есть

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

или, подставив сюда (21,8):

$$E = {}^1/_2 m\omega^2 a^2. \tag{21,10}$$

Она пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

Зависимость координаты колеблющейся системы от времени часто оказывается удобным представлять в виде вещественной части комплексного выражения

$$x = \mathrm{Re}\,\{Ae^{i\omega t}\}, \tag{21,11}$$

где A — комплексная постоянная; написав ее в виде

$$A = ae^{i\alpha}, \tag{21,12}$$

мы вернемся к выражению (21,8). Постоянную A называют *комплексной амплитудой*; ее модуль совпадает с обычной амплитудой, а аргумент — с начальной фазой.

Оперирование с экспоненциальными множителями в математическом отношении проще, чем с тригонометрическими, так как дифференцирование не меняет их вида. При этом, пока мы производим лишь линейные операции (сложение, умножение на постоянные коэффициенты, дифференцирование, интегрирование), можно вообще опускать знак взятия вещественной части, переходя к последней лишь в окончательном результате вычислений.

Задачи

1. Выразить амплитуду и начальную фазу колебаний через начальные значения x_0 и v_0 координаты и скорости.

Ответ:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}.$$

2. Найти отношение частот ω и ω' колебаний двух двухатомных молекул, состоящих из атомов различных изотопов; массы атомов равны соответственно m_1, m_2 и m_1', m_2'.

Решение. Поскольку атомы изотопов взаимодействуют одинаковым образом, то $k = k'$. Роль же коэффициентов m в кинетических энергиях молекул играют их приведенные массы. Согласно (21,6) находим поэтому:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m_1' + m_2')}{m_1' m_2' (m_1 + m_2)}}.$$

3. Найти частоту колебаний точки с массой m, способной двигаться по прямой и прикрепленной к пружине, другой конец которой закреплен в точке A (рис. 22) на расстоянии l от прямой. Пружина, имея длину l, натянута с силой F.

Решение. Потенциальная энергия пружины (с точностью до малых величин высшего порядка) равна произведению силы F на удлинение δl пружины. При $x \ll l$ имеем:

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx x^2/2l,$$

так что $U = Fx^2/2l$. Поскольку кинетическая энергия есть $m\dot{x}^2/2$, то

$$\omega = \sqrt{F/ml}.$$

4. То же, если точка m движется по окружности радиуса r (рис. 23).

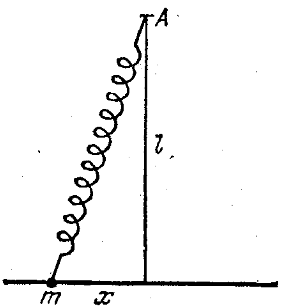

Рис. 22

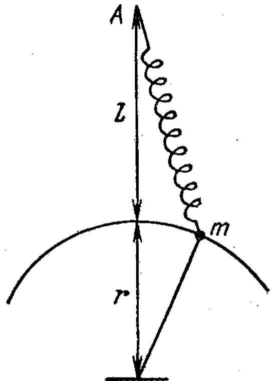

Рис. 23

Решение. В этом случае удлинение пружины (при $\varphi \ll 1$)

$$\delta l = \sqrt{r^2 + (l+r)^2 - 2r(l+r)\cos\varphi} - l \approx \frac{r(l+r)}{2l}\varphi^2.$$

Кинетическая энергия $T = {}^1/_2 mr^2\dot{\varphi}^2$. Отсюда частота

$$\omega = \sqrt{\frac{F(r+l)}{rlm}}.$$

5. Найти частоту колебаний изображенного на рис. 2 маятника, точка подвеса которого (с массой m_1 в ней) способна совершать движение в горизонтальном направлении.

Решение. При $\varphi \ll 1$ из полученной в задаче 3 § 14 формулы находим:

$$T = \frac{m_1 m_2 l^2}{2(m_1+m_2)}\dot{\varphi}^2, \qquad U = \frac{m_2 gl}{2}\varphi^2.$$

Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{g(m_1+m_2)}{m_1 l}}.$$

6. Определить форму кривой, при качании вдоль которой (в поле тяжести) частота колебаний не зависит от амплитуды.

Решение. Поставленному условию будет удовлетворять такая кривая, при движении вдоль которой потенциальная энергия частицы будет $U = ks^2/2$, где s — длина дуги, отсчитываемая от положения равновесия; при этом кинетическая энергия $T = m\dot{s}^2/2$ (m — масса частицы) и частота колебаний будет $\omega = \sqrt{k/m}$ вне зависимости от начального значения s.

Но в поле тяжести $U = mgy$, где y — вертикальная координата. Поэтому имеем: $ks^2/2 = mgy$ или

$$y = \frac{\omega^2}{2g} s^2.$$

С другой стороны, $ds^2 = dx^2 + dy^2$, откуда

$$x = \int \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 1}\, dy = \int \sqrt{\frac{g}{2\omega^2 y} - 1}\, dy.$$

Интегрирование удобно произвести, сделав подстановку

$$y = \frac{g}{4\omega^2}(1 - \cos\xi).$$

Тогда получим:

$$x = \frac{g}{4\omega^2}(\xi + \sin\xi).$$

Эти два равенства определяют в параметрическом виде уравнение искомой кривой; она представляет собой циклоиду.

§ 22. Вынужденные колебания

Перейдем к рассмотрению колебаний в системе, на которую действует некоторое переменное внешнее поле; такие колебания называют *вынужденными* в отличие от рассмотренных в предыдущем параграфе так называемых *свободных* колебаний. Поскольку колебания предполагаются по-прежнему малыми, то тем самым подразумевается, что внешнее поле достаточно слабое, в противном случае оно могло бы вызвать слишком большое смещение x.

В этом случае наряду с собственной потенциальной энергией $^1/_2 kx^2$ система обладает еще потенциальной энергией $U_e(x, t)$, связанной с действием внешнего поля. Разлагая этот дополнительный член в ряд по степеням малой величины x, получим:

$$U_e(x, t) \approx U_e(0, t) + x \left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

Первый член является функцией только от времени и потому может быть опущен в лагранжевой функции (как полная производная по t от некоторой другой функции времени). Во втором члене $-\partial U_e/\partial x$ есть внешняя «сила», действующая на систему в положении равновесия и являющаяся заданной функцией времени; обозначим ее как $F(t)$. Таким образом, в потенциальной энергии появляется член $-xF(t)$, так что функция Лагранжа системы будет:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t). \qquad (22{,}1)$$