кинетическая энергия $T = m\dot{s}^2/2$ (m — масса частицы) и частота колебаний будет $\omega = \sqrt{k/m}$ вне зависимости от начального значения s.

Но в поле тяжести $U = mgy$, где y — вертикальная координата. Поэтому имеем: $ks^2/2 = mgy$ или

$$y = \frac{\omega^2}{2g} s^2.$$

С другой стороны, $ds^2 = dx^2 + dy^2$, откуда

$$x = \int \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 1}\, dy = \int \sqrt{\frac{g}{2\omega^2 y} - 1}\, dy.$$

Интегрирование удобно произвести, сделав подстановку

$$y = \frac{g}{4\omega^2}(1 - \cos\xi).$$

Тогда получим:

$$x = \frac{g}{4\omega^2}(\xi + \sin\xi).$$

Эти два равенства определяют в параметрическом виде уравнение искомой кривой; она представляет собой циклоиду.

§ 22. Вынужденные колебания

Перейдем к рассмотрению колебаний в системе, на которую действует некоторое переменное внешнее поле; такие колебания называют *вынужденными* в отличие от рассмотренных в предыдущем параграфе так называемых *свободных* колебаний. Поскольку колебания предполагаются по-прежнему малыми, то тем самым подразумевается, что внешнее поле достаточно слабое, в противном случае оно могло бы вызвать слишком большое смещение x.

В этом случае наряду с собственной потенциальной энергией $^1/_2 kx^2$ система обладает еще потенциальной энергией $U_e(x, t)$, связанной с действием внешнего поля. Разлагая этот дополнительный член в ряд по степеням малой величины x, получим:

$$U_e(x, t) \approx U_e(0, t) + x \left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

Первый член является функцией только от времени и потому может быть опущен в лагранжевой функции (как полная производная по t от некоторой другой функции времени). Во втором члене $-\partial U_e/\partial x$ есть внешняя «сила», действующая на систему в положении равновесия и являющаяся заданной функцией времени; обозначим ее как $F(t)$. Таким образом, в потенциальной энергии появляется член $-xF(t)$, так что функция Лагранжа системы будет:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t). \qquad (22,1)$$

Соответствующее уравнение движения есть

$$m\ddot{x}+kx=F(t),$$

или

$$\ddot{x}+\omega^2x=\frac{1}{m}F(t), \tag{22,2}$$

где мы снова ввели частоту ω свободных колебаний.

Как известно, общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами получается в виде суммы двух выражений: $x=x_0+x_1$, где x_0 — общее решение однородного уравнения, а x_1 — частный интеграл неоднородного уравнения. В данном случае x_0 представляет собой рассмотренные в предыдущем параграфе свободные колебания.

Рассмотрим представляющий особый интерес случай, когда вынуждающая сила тоже является простой периодической функцией времени с некоторой частотой γ:

$$F(t)=f\cos(\gamma t+\beta). \tag{22,3}$$

Частный интеграл уравнения (22,2) ищем в виде $x_1=b\cos(\gamma t+\beta)$ с тем же периодическим множителем. Подстановка в уравнение дает: $b=f/m(\omega^2-\gamma^2)$; прибавляя решение однородного уравнения, получим общий интеграл в виде

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\gamma t+\beta). \tag{22,4}$$

Произвольные постоянные a и α определяются из начальных условий.

Таким образом, под действием периодической вынуждающей силы система совершает движение, представляющее собой совокупность двух колебаний — с собственной частотой системы ω и с частотой вынуждающей силы γ.

Решение (22,4) неприменимо в случае так называемого *резонанса*, когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой системы. Для нахождения общего решения уравнения движения в этом случае перепишем выражение (22,4) с соответствующим переобозначением постоянных в виде

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}\left[\cos(\gamma t+\beta)-\cos(\omega t+\beta)\right].$$

При $\gamma\to\omega$ второй член дает неопределенность вида 0/0. Раскрывая ее по правилу Лопиталя, получим:

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{2m\omega}t\sin(\omega t+\beta). \tag{22,5}$$

Таким образом, в случае резонанса амплитуда колебаний растет линейно со временем (до тех пор, пока колебания не перестанут быть малыми и вся излагаемая теория перестанет быть применимой).

Выясним еще, как выглядят малые колебания вблизи резонанса, когда $\gamma = \omega + \varepsilon$, где ε — малая величина. Представим общее решение в комплексном виде, как

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{i(\omega+\varepsilon)t} = (A + Be^{i\varepsilon t})\, e^{i\omega t}. \tag{22,6}$$

Так как величина $A + Be^{i\varepsilon t}$ мало меняется в течение периода $2\pi/\omega$ множителя $e^{i\omega t}$, то движение вблизи резонанса можно рассматривать как малые колебания, но с переменной амплитудой[1]).

Обозначив последнюю через C, имеем:

$$C = |A + Be^{i\varepsilon t}|.$$

Представив A и B соответственно в виде $ae^{i\alpha}$ и $be^{i\beta}$, получим:

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varepsilon t + \beta - \alpha). \tag{22,7}$$

Таким образом, амплитуда колеблется периодически с частотой ε, меняясь между двумя пределами

$$|a - b| \leqslant C \leqslant a + b.$$

Это явление носит название *биений*.

Уравнение движения (22,2) может быть проинтегрировано и в общем виде при произвольной вынуждающей силе $F(t)$. Это легко сделать, переписав его предварительно в виде

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{1}{m}F(t)$$

или

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega x = \frac{1}{m}F(t), \tag{22,8}$$

где введена комплексная величина

$$\xi = \dot{x} + i\omega x. \tag{22,9}$$

Уравнение (22,8) уже не второго, а первого порядка. Без правой части его решением было бы $\xi = Ae^{i\omega t}$ с постоянной A. Следуя общему правилу, ищем решение неоднородного уравнения в виде $\xi = A(t)e^{i\omega t}$ и для функции $A(t)$ получаем уравнение

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{m}F(t)\,e^{-i\omega t}.$$

Интегрируя его, получим решение уравнения (22,8) в виде

$$\xi = e^{i\omega t}\left\{\int_0^t \frac{1}{m}F(t)\,e^{-i\omega t}\,dt + \xi_0\right\}, \tag{22,10}$$

[1]) Меняется также «постоянный» член в фазе колебаний.

где постоянная интегрирования ξ_0 представляет собой значение ξ в момент времени $t=0$. Это и есть искомое общее решение; функция $x(t)$ дается мнимой частью выражения (22,10) (деленной на ω)[1].

Энергия системы, совершающей вынужденные колебания, разумеется, не сохраняется; система приобретает энергию за счет источника внешней силы. Определим полную энергию, передаваемую системе за все время действия силы (от $-\infty$ до $+\infty$), предполагая начальную энергию равной нулю. Согласно формуле (22,10) (с нижним пределом интегрирования $-\infty$ вместо нуля и с $\xi(-\infty)=0$) имеем при $t\to\infty$:

$$|\xi(\infty)|^2=\frac{1}{m^2}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\right|^2.$$

С другой стороны, энергия системы как таковой дается выражением

$$E=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\omega^2x^2)=\frac{m}{2}|\xi|^2. \qquad (22,11)$$

Подставив сюда $|\xi(\infty)|^2$, получим искомую передачу энергии в виде

$$E=\frac{1}{2m}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\right|^2; \qquad (22,12)$$

она определяется квадратом модуля компоненты Фурье силы $F(t)$ с частотой, равной собственной частоте системы.

В частности, если внешняя сила действует лишь в течение короткого промежутка времени (малого по сравнению с $1/\omega$), то можно положить $e^{-i\omega t}\approx 1$. Тогда

$$E=\frac{1}{2m}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(t)\,dt\right)^2.$$

Этот результат заранее очевиден: он выражает собой тот факт, что кратковременная сила сообщает системе импульс $\int F\,dt$, не успев за это время произвести заметного смещения.

Задачи

1. Определить вынужденные колебания системы под влиянием силы $F(t)$, если в начальный момент $t=0$ система покоится в положении равновесия ($x=0$, $\dot{x}=0$) для случаев

а) $F=\mathrm{const}=F_0$.

---

[1]) При этом, разумеется, сила $F(t)$ должна быть написана в вещественном виде.

Ответ: $x = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t)$; действие постоянной силы приводит к смещению положения равновесия, вокруг которого происходят колебания.

б) $F = at$.

Ответ: $x = \frac{a}{m\omega^3}(\omega t - \sin\omega t)$.

в) $F = F_0 e^{-\alpha t}$.

Ответ: $x = \frac{F_0}{m(\omega^2 + \alpha^2)}\left(e^{-\alpha t} - \cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)$.

г) $F = F_0 e^{-\alpha t}\cos\beta t$.

Ответ:

$$x = \frac{F_0}{m[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]}\Big\{-(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)\cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega}(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)\sin\omega t + e^{-\alpha t}[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)\cos\beta t - 2\alpha\beta\sin\beta t]\Big\}$$

(при решении удобно писать силу в комплексном виде $F = F_0 e^{(-\alpha + i\beta)t}$).

2. Определить конечную амплитуду колебаний системы после действия внешней силы, меняющейся по закону $F = 0$ при $t < 0$, $F = F_0 t/T$ при $0 < t < T$, $F = F_0$ при $t > T$ (рис. 24); до момента $t = 0$ система покоится в положении равновесия.

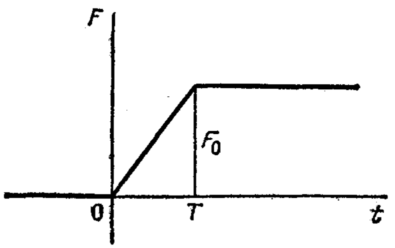

Рис. 24

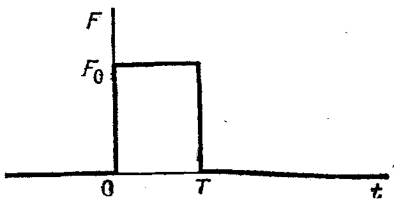

Рис. 25

Решение. В интервале времени $0 < t < T$ колебания, удовлетворяющие начальному условию, имеют вид

$$x = \frac{F_0}{mT\omega^3}(\omega t - \sin\omega t).$$

При $t > T$ ищем решение в виде

$$x = c_1\cos\omega(t - T) + c_2\sin\omega(t - T) + \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Из условий непрерывности x и $\dot{x}$ при $t = T$ находим:

$$c_1 = -\frac{F_0}{mT\omega^3}\sin\omega T, \qquad c_2 = \frac{F_0}{mT\omega^3}(1 - \cos\omega T).$$

При этом амплитуда колебаний

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{2F_0}{mT\omega^3}\sin\frac{\omega T}{2}.$$

Отметим, что она тем меньше, чем медленнее «включается» сила F_0 (т. е. чем больше T).

3. То же в случае постоянной силы F_0, действующей в течение ограниченного времени T (рис. 25).

Решение можно найти как в задаче 2, но еще проще воспользоваться формулой (22,10). При $t > T$ имеем свободные колебания вокруг положения $x = 0$; при этом

$$\xi = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \int_0^T e^{-i\omega t}\, dt = \frac{F_0}{i\omega m}\left(1 - e^{-i\omega T}\right) e^{i\omega t};$$

квадрат же модуля ξ дает амплитуду согласно формуле $|\xi|^2 = a^2\omega^2$. В результате находим:

$$a = \frac{2F_0}{m\omega^2} \sin\frac{\omega T}{2}.$$

4. То же в случае силы, действующей в течение времени от нуля до T, по закону $F = F_0 t/T$ (рис. 26).

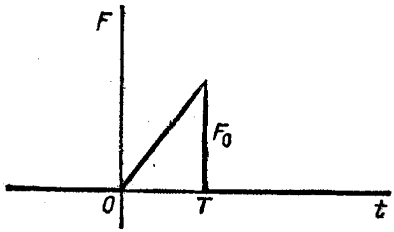

Рис. 26

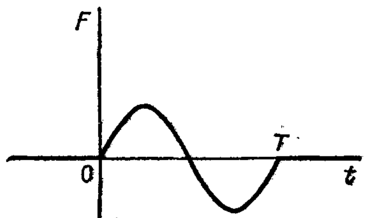

Рис. 27

Решение. Тем же способом получим:

$$a = \frac{F_0}{Tm\omega^3}\sqrt{\omega^2T^2 - 2\omega T \sin\omega T + 2(1 - \cos\omega T)}.$$

5. То же в случае силы, меняющейся в течение времени от нуля до $T = 2\pi/\omega$ по закону $F = F_0 \sin\omega t$ (рис. 27).

Решение. Подставив в (22,10)

$$F(t) = F_0 \sin\omega t = \frac{F_0}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

и проинтегрировав от нуля до T, получим:

$$a = F_0\pi/m\omega^2.$$

§ 23. Колебания систем со многими степенями свободы

Теория свободных колебаний систем с несколькими (s) степенями свободы строится аналогично тому, как были рассмотрены в § 21 одномерные колебания.

Пусть потенциальная энергия системы U как функция обобщенных координат q_i ($i = 1, 2, \ldots, s$) имеет минимум при $q_i = q_{i0}$. Вводя малые смещения

$$x_i = q_i - q_{i0} \tag{23,1}$$