Решение можно найти как в задаче 2, но еще проще воспользоваться формулой (22,10). При $t > T$ имеем свободные колебания вокруг положения $x = 0$; при этом

$$\xi = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \int_0^T e^{-i\omega t}\, dt = \frac{F_0}{i\omega m}\left(1 - e^{-i\omega T}\right) e^{i\omega t};$$

квадрат же модуля ξ дает амплитуду согласно формуле $|\xi|^2 = a^2\omega^2$. В результате находим:

$$a = \frac{2F_0}{m\omega^2} \sin \frac{\omega T}{2}.$$

4. То же в случае силы, действующей в течение времени от нуля до T, по закону $F = F_0 t/T$ (рис. 26).

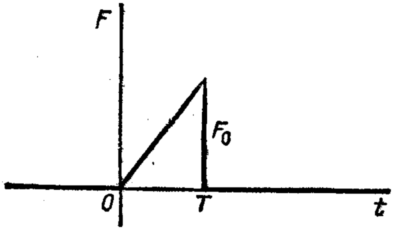

Рис. 26

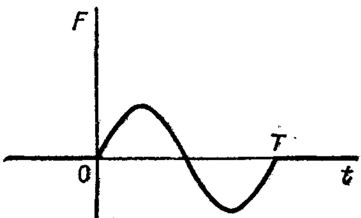

Рис. 27

Решение. Тем же способом получим:

$$a = \frac{F_0}{Tm\omega^3} \sqrt{\omega^2 T^2 - 2\omega T \sin \omega T + 2(1 - \cos \omega T)}.$$

5. То же в случае силы, меняющейся в течение времени от нуля до $T = 2\pi/\omega$ по закону $F = F_0 \sin \omega t$ (рис. 27).

Решение. Подставив в (22,10)

$$F(t) = F_0 \sin \omega t = \frac{F_0}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

и проинтегрировав от нуля до T, получим:

$$a = F_0 \pi / m\omega^2.$$

§ 23. Колебания систем со многими степенями свободы

Теория свободных колебаний систем с несколькими (s) степенями свободы строится аналогично тому, как были рассмотрены в § 21 одномерные колебания.

Пусть потенциальная энергия системы U как функция обобщенных координат q_i ($i = 1, 2, \ldots, s$) имеет минимум при $q_i = q_{i0}$. Вводя малые смещения

$$x_i = q_i - q_{i0} \tag{23,1}$$

и разлагая по ним U с точностью до членов второго порядка, получим потенциальную энергию в виде положительно определенной квадратичной формы

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,k} k_{ik}x_i x_k, \tag{23,2}$$

где мы снова отсчитываем потенциальную энергию от ее минимального значения. Поскольку коэффициенты k_{ik} и k_{ki} входят в (23,2) умноженными на одну и ту же величину $x_i x_k$, то ясно, что их можно всегда считать симметричными по своим индексам

$$k_{ik} = k_{ki}.$$

В кинетической же энергии, которая имеет в общем случае вид

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\,\dot{q}_i\dot{q}_k$$

(см. (5,5)), полагаем в коэффициентах $q_i = q_{i0}$ и, обозначая постоянные $a_{ik}(q_0)$ посредством m_{ik}, получаем ее в виде положительно определенной квадратичной формы

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k. \tag{23,3}$$

Коэффициенты m_{ik} тоже можно всегда считать симметричными по индексам

$$m_{ik} = m_{ki}.$$

Таким образом, лагранжева функция системы, совершающей свободные малые колебания:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} (m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k - k_{ik}x_i x_k). \tag{23,4}$$

Составим теперь уравнения движения. Для определения входящих в них производных напишем полный дифференциал функции Лагранжа

$$dL = \frac{1}{2}\sum_{i,k} (m_{ik}\dot{x}_i\,d\dot{x}_k + m_{ik}\dot{x}_k\,d\dot{x}_i - k_{ik}x_i\,dx_k - k_{ik}x_k\,dx_i).$$

Поскольку величина суммы не зависит, разумеется, от обозначения индексов суммирования, меняем в первом и третьем членах в скобках i на k, а k на i; учитывая при этом симметричность коэффициентов m_{ik} и k_{ik}, получим:

$$dL = \sum_{i,k} (m_{ik}\dot{x}_k\,d\dot{x}_i - k_{ik}x_k\,dx_i).$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=\sum_k m_{ik}\dot{x}_k, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_i}=-\sum_k k_{ik}x_k.$$

Поэтому уравнения Лагранжа

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k+\sum_k k_{ik}x_k=0. \tag{23,5}$$

Они представляют собой систему s $(i=1, 2, \ldots, s)$ линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

По общим правилам решения таких уравнений ищем s неизвестных функций $x_k(t)$ в виде

$$x_k=A_k e^{i\omega t}, \tag{23,6}$$

где A_k — некоторые, пока неопределенные, постоянные. Подставляя (23,6) в систему (23,5), получаем по сокращении на $e^{i\omega t}$ систему линейных однородных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять постоянные A_k:

$$\sum_k(-\omega^2 m_{ik}+k_{ik})A_k=0. \tag{23,7}$$

Для того чтобы эта система имела отличные от нуля решения, должен обращаться в нуль ее определитель

$$|k_{ik}-\omega^2 m_{ik}|=0. \tag{23,8}$$

Уравнение (23,8) — так называемое *характеристическое* уравнение — представляет собой уравнение степени s относительно ω^2. Оно имеет в общем случае s различных вещественных положительных корней ω_α^2, $\alpha=1, 2, \ldots, s$ (в частных случаях некоторые из этих корней могут совпадать). Определенные таким образом величины ω_α называются *собственными частотами* системы.

Вещественность и положительность корней уравнения (23,8) заранее очевидны уже из физических соображений. Действительно, наличие у ω мнимой части означало бы наличие во временной зависимости координат x_k (23,6) (а с ними и скоростей $\dot{x}_k$) экспоненциально убывающего или экспоненциально возрастающего множителя. Но наличие такого множителя в данном случае недопустимо, так как оно привело бы к изменению со временем полной энергии $E=U+T$ системы в противоречии с законом ее сохранения.

В том же самом можно убедиться и чисто математическим путем. Умножив уравнение (23,7) на A_i^* и просуммировав затем по i, получим:

$$\sum_{i,k}(-\omega^2 m_{ik}+k_{ik})A_i^*A_k=0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{\sum k_{ik} A_i^* A_k}{\sum m_{ik} A_i^* A_k}.$$

Квадратичные формы в числителе и знаменателе этого выражения вещественны в силу вещественности и симметричности коэффициентов k_{ik} и m_{ik}; действительно,

$$\Big(\sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k\Big)^* = \sum_{i,k} k_{ik} A_i A_k^* = \sum_{i,k} k_{ki} A_i A_k^* = \sum_{i,k} k_{ik} A_k A_i^*.$$

Они также существенно положительны, а потому положительно и ω^2 [1]).

После того как частоты ω_α найдены, подставляя каждое из них в уравнения (23,7), можно найти соответствующие значения коэффициентов A_k. Если все корни ω_α характеристического уравнения различны, то, как известно, коэффициенты A_k пропорциональны минорам определителя (23,8), в котором ω заменена соответствующим значением ω_α; обозначим эти миноры через $\Delta_{k\alpha}$. Частное решение системы дифференциальных уравнений (23,5) имеет, следовательно, вид

$$x_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t},$$

где C_α — произвольная (комплексная) постоянная.

Общее же решение дается суммой всех s частных решений. Переходя к вещественной части, напишем его в виде

$$x_k = \operatorname{Re}\Big\{\sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\Big\} \equiv \sum_\alpha \Delta_{k\alpha}\Theta_\alpha, \qquad (23{,}9)$$

где мы ввели обозначение

$$\Theta_\alpha = \operatorname{Re}\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\}. \qquad (23{,}10)$$

Таким образом, изменение каждой из координат системы со временем представляет собой наложение s простых периодических колебаний $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_s$ с произвольными амплитудами и фазами, но имеющих вполне определенные частоты.

Естественно возникает вопрос, нельзя ли выбрать обобщенные координаты таким образом, чтобы каждая из них совершала только одно простое колебание? Самая форма общего интеграла (23,9) указывает путь к решению этой задачи.

---

[1]) Положительная определенность квадратичной формы, построенной на коэффициентах k_{ik}, очевидна из их определения в (23,2) для вещественных значений переменных. Но если написать комплексные величины A_k в явном виде как $a_k + ib_k$, то мы получим (снова в силу симметричности k_{ik}):

$$\sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k = \sum_{i,k} k_{ik}(a_i - ib_i)(a_k + ib_k) = \sum_{i,k} k_{ik} a_i a_k + \sum_{i} k_{ik} b_i b_k,$$

т. е. сумму двух положительно определенных форм.

В самом деле, рассматривая s соотношений (23,9) как систему уравнений с s неизвестными величинами Θ_α, мы можем, разрешив эту систему, выразить величины $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_s$ через координаты $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Следовательно, величины Θ_α можно рассматривать как новые обобщенные координаты. Эти координаты называют *нормальными* (или главными), а совершаемые ими простые периодические колебания — нормальными колебаниями системы.

Нормальные координаты Θ_α удовлетворяют, как это явствует из их определения, уравнениям

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0. \tag{23,11}$$

Это значит, что в нормальных координатах уравнения движения распадаются на s независимых друг от друга уравнений. Ускорение каждой нормальной координаты зависит только от значения этой же координаты, и для полного определения ее временно́й зависимости надо знать начальные значения только ее же самой и соответствующей ей скорости. Другими словами, нормальные колебания системы полностью независимы.

Из сказанного очевидно, что функция Лагранжа, выраженная через нормальные координаты, распадается на сумму выражений, каждое из которых соответствует одномерному колебанию с одной из частот ω_α, т. е. имеет вид

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \left(\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2\right), \tag{23,12}$$

где m_α — положительные постоянные. С математической точки зрения это означает, что преобразованием (23,9) обе квадратичные формы — кинетическая энергия (23,3) и потенциальная (23,2) — одновременно приводятся к диагональному виду.

Обычно нормальные координаты выбирают таким образом, чтобы коэффициенты при квадратах скоростей в функции Лагранжа были равны 1/2. Для этого достаточно определить нормальные координаты (обозначим их теперь Q_α) равенствами

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha}\, \Theta_\alpha. \tag{23.13}$$

Тогда

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha \left(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2\right).$$

Все изложенное мало меняется в случае, когда среди корней характеристического уравнения имеются кратные корни. Общий вид (23,9), (23,10) интеграла уравнений движений остается таким же (с тем же числом s членов) с той лишь разницей, что соответствующие кратным частотам коэффициенты $\Delta_{k\alpha}$ уже не являются минорами определителя, которые, как известно, обращаются в этом случае в нуль[1]).

Каждой кратной (или, как говорят, *вырожденной*) частоте отвечает столько различных нормальных координат, какова степень кратности, но выбор этих нормальных координат не однозначен. Поскольку в кинетическую и потенциальную энергии нормальные координаты (с одинаковым ω_α) входят в виде одинаково преобразующихся сумм $\sum \dot{Q}_\alpha^2$ и $\sum Q_\alpha^2$, то их можно подвергнуть любому линейному преобразованию, оставляющему инвариантной сумму квадратов.

Весьма просто нахождение нормальных координат для трехмерных колебаний одной материальной точки, находящейся в постоянном внешнем поле. Помещая начало декартовой системы координат в точку минимума потенциальной энергии $U(x, y, z)$, мы получим последнюю в виде квадратичной формы переменных x, y, z, а кинетическая энергия

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

(m — масса частиц) не зависит от выбора направления координатных осей. Поэтому соответствующим поворотом осей надо только привести к диагональному виду потенциальную энергию. Тогда

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2), \qquad (23,14)$$

и колебания вдоль осей x, y, z являются главными с частотами

$$\omega_1 = \sqrt{k_1/m}, \quad \omega_2 = \sqrt{k_2/m}, \quad \omega_3 = \sqrt{k_3/m}.$$

В частном случае центрально-симметричного поля ($k_1 = k_2 = k_3 \equiv k$, $U = kr^2/2$) эти три частоты совпадают (см. задачу 3).

Использование нормальных координат дает возможность привести задачу о вынужденных колебаниях системы с несколькими степенями свободы к задачам об одномерных вынужденных колебаниях. Функция Лагранжа системы с учетом действующих на нее переменных внешних сил имеет вид

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t)\, x_k, \qquad (23,15)$$

[1]) Невозможность возникновения в общем интеграле членов, содержащих наряду с экспоненциальными также и степенные временные множители, очевидна из тех же физических соображений, которые исключают существование комплексных «частот»: наличие таких членов противоречило бы закону сохранения энергии.

где L_0 — лагранжева функция свободных колебаний. Вводя вместо координат x_k нормальные координаты, получим:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \sum_{\alpha} f_\alpha(t) Q_\alpha, \tag{23,16}$$

где введено обозначение

$$f_\alpha(t) = \sum_k F_k(t) \frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}}.$$

Соответственно уравнения движения

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(t) \tag{23,17}$$

будут содержать лишь по одной неизвестной функции $Q_\alpha(t)$.

Задачи

1. Определить колебания системы с двумя степенями свободы, если ее функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha xy$$

(две одинаковые одномерные системы с собственной частотой ω_0, связанные взаимодействием — αxy).

Решение. Уравнения движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha y, \qquad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \alpha x.$$

Подстановка (23,6) дает:

$$A_x(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_y, \qquad A_y(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_x. \tag{1}$$

Характеристическое уравнение $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \alpha^2$, откуда

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha, \qquad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha.$$

При $\omega = \omega_1$ уравнения (1) дают $A_x = A_y$, а при $\omega = \omega_2$ $A_x = -A_y$. Поэтому

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2)$$

(коэффициенты $1/\sqrt{2}$ соответствуют указанной в тексте нормировке нормальных координат).

При $\alpha \ll \omega_0^2$ (слабая связь) имеем:

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\alpha}{2\omega_0}, \qquad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{\alpha}{2\omega_0}.$$

Изменение x и y представляет собой в этом случае наложение двух колебаний с близкими частотами, т. е. имеет характер биений с частотой $\omega_2 - \omega_1 = \alpha/\omega_0$ (см. § 22). При этом в момент, когда амплитуда координаты x проходит через максимум, амплитуда y проходит через минимум и наоборот.

2. Определить малые колебания двойного плоского маятника (рис. 1).

Решение. Для малых колебаний ($\varphi_1 \ll 1$, $\varphi_2 \ll 1$) найденная в задаче 1 § 5 функция Лагранжа принимает вид

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - \frac{m_1 + m_2}{2} g l_1 \varphi_1^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \varphi_2^2.$$

Уравнения движения:

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g \varphi_1 = 0,$$
$$l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 = 0.$$

После подстановки (23,6):

$$A_1 (m_1 + m_2)(g - l_1 \omega^2) - A_2 \omega^2 m_2 l_2 = 0,$$
$$- A_1 l_1 \omega^2 + A_2 (g - l_2 \omega^2) = 0.$$

Корни характеристического уравнения:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2 m_1 l_1 l_2} \left\{ (m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{(m_1 + m_2)\left[(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)^2 - 4 m_1 l_1 l_2\right]} \right\}.$$

При $m_1 \to \infty$ частоты стремятся к пределам $\sqrt{g/l_1}$ и $\sqrt{g/l_2}$, соответствующим независимым колебаниям двух маятников.

3. Найти траекторию движения частицы в центральном поле $U = kr^2/2$ (так называемый *пространственный осциллятор*).

Решение. Как и во всяком центральном поле, движение происходит в одной плоскости, которую выбираем в качестве плоскости x, y. Изменение каждой из координат x, y — простое колебание с одинаковыми частотами $\omega = \sqrt{k/m}$:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \qquad y = b \cos(\omega t + \beta)$$

или

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = b \cos(\varphi + \delta) = b \cos \delta \cos \varphi - b \sin \delta \sin \varphi,$$

где введены обозначения $\varphi = \omega t + \alpha$, $\delta = \beta - \alpha$. Определив отсюда $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ и составив сумму их квадратов, получим уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

Это — эллипс с центром в начале координат[1]). При $\delta = 0$ или π траектория вырождается в отрезки прямой.

§ 24. Колебания молекул

Если мы имеем дело с системой частиц, взаимодействующих друг с другом, но не находящихся во внешнем поле, то не все ее степени свободы имеют колебательный характер. Типичным примером таких систем являются молекулы. Помимо движений, представляющих собой колебания атомов около их положения равновесия внутри молекулы, молекула как целое может совершать поступательное и вращательное движения.

---

[1]) Тот факт, что в поле с потенциальной энергией $U = kr^2/2$ движение происходит по замкнутой кривой, был уже упомянут в § 14.