

Решение. Для малых колебаний ($\varphi_1 \ll 1$, $\varphi_2 \ll 1$) найденная в задаче 1 § 5 функция Лагранжа принимает вид

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{l}_1^2 \varphi_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{l}_2^2 \varphi_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - \frac{m_1 + m_2}{2} g l_1 \varphi_1^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \varphi_2^2.$$

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g \varphi_1 &= 0, \\ l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

После подстановки (23,6):

$$\begin{aligned} A_1 (m_1 + m_2) (g - l_1 \omega^2) - A_2 \omega^2 m_2 l_2 &= 0, \\ -A_1 l_1 \omega^2 + A_2 (g - l_2 \omega^2) &= 0. \end{aligned}$$

Корни характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2} \{ (m_1 + m_2) (l_1 + l_2) \pm \\ \pm \sqrt{(m_1 + m_2) [(m_1 + m_2) (l_1 + l_2)^2 - 4m_1 l_1 l_2]} \}. \end{aligned}$$

При $m_1 \rightarrow \infty$ частоты стремятся к пределам $\sqrt{g/l_1}$ и $\sqrt{g/l_2}$, соответствующим независимым колебаниям двух маятников.

3. Найти траекторию движения частицы в центральном поле $U = kr^2/2$ (так называемый *пространственный осциллятор*).

Решение. Как и во всяком центральном поле, движение происходит в одной плоскости, которую выбираем в качестве плоскости x, y . Изменение каждой из координат x, y — простое колебание с одинаковыми частотами $\omega = \sqrt{k/m}$:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad y = b \cos(\omega t + \beta)$$

или

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \cos(\varphi + \delta) = b \cos \delta \cos \varphi - b \sin \delta \sin \varphi,$$

где введены обозначения $\varphi = \omega t + \alpha$, $\delta = \beta - \alpha$. Определив отсюда $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ и составив сумму их квадратов, получим уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

Это — эллипс с центром в начале координат¹⁾. При $\delta = 0$ или π траектория вырождается в отрезки прямой.

§ 24. Колебания молекул

Если мы имеем дело с системой частиц, взаимодействующих друг с другом, но не находящихся во внешнем поле, то не все ее степени свободы имеют колебательный характер. Типичным примером таких систем являются молекулы. Помимо движений, представляющих собой колебания атомов около их положения равновесия внутри молекулы, молекула как целое может совершать поступательное и вращательное движения.

¹⁾ Тот факт, что в поле с потенциальной энергией $U = kr^2/2$ движение происходит по замкнутой кривой, был уже упомянут в § 14.

Поступательному перемещению соответствуют три степени свободы. Столько же имеется в общем случае вращательных степеней свободы, так что из $3n$ степеней свободы n -атомной молекулы всего $3n - 6$ отвечают колебательному движению. Исключения представляют молекулы, в которых все атомы расположены вдоль одной прямой. Поскольку говорить о вращении вокруг этой прямой не имеет смысла, то вращательных степеней свободы в этом случае всего две, так что колебательных имеется $3n - 5$.

При решении механической задачи о колебаниях молекулы целесообразно с самого начала исключить из рассмотрения поступательные и вращательные степени свободы.

Чтобы исключить поступательное движение, надо считать равным нулю полный импульс молекулы. Поскольку это условие означает неподвижность центра инерции молекулы, то его можно выразить в виде постоянства трех координат последнего. Положив $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a$ (где \mathbf{r}_{a0} — радиус-вектор неподвижного положения равновесия a -го атома, а \mathbf{u}_a — его отклонение от этого положения), представим условие

$$\sum m_a \mathbf{r}_a = \text{const} \equiv \sum m_a \mathbf{r}_{a0}$$

в виде

$$\sum m_a \mathbf{u}_a = 0. \quad (24,1)$$

Чтобы исключить вращение молекулы, следует положить равным нулю ее полный момент импульса. Так как момент не является полной производной по времени от какой-либо функции координат, то условие его исчезновения не может быть, вообще говоря, выражено в виде равенства нулю такой функции. Однако случай малых колебаний как раз представляет исключение. В самом деле, снова положив $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a$ и пренебрегая малыми величинами второго порядка по смещениям \mathbf{u}_a , представим момент импульса молекулы в виде

$$\mathbf{M} = \sum m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a] \approx \sum m_a [\mathbf{r}_{a0} \dot{\mathbf{u}}_a] = \frac{d}{dt} \sum m_a [\mathbf{r}_{a0} \mathbf{u}_a].$$

Условие его исчезновения в этом приближении можно, следовательно, представить в виде

$$\sum m_a [\mathbf{r}_{a0} \mathbf{u}_a] = 0 \quad (24,2)$$

(начало координат может быть при этом выбрано произвольным образом).

Нормальные колебания молекулы могут быть классифицированы по характеру движения атомов в них на основании соображений, связанных с симметрией расположения атомов (в положениях равновесия) в молекуле. Для этой цели существует общий метод, основанный на использовании теории

групп; он изложен в другом томе этого курса¹⁾. Здесь же мы рассмотрим лишь некоторые элементарные примеры.

Если все n атомов молекулы лежат в одной плоскости, то можно различить нормальные колебания, оставляющие атомы в этой плоскости, и нормальные колебания, при которых атомы выводятся из плоскости. Легко определить число тех и других. Так как всего для плоского движения имеется $2n$ степеней свободы, из которых две поступательные и одна вращательная, то число нормальных колебаний, не выводящих атомы из плоскости, равно $2n - 3$. Остальные же $(3n - 6) - (2n - 3) = n - 3$ колебательных степеней свободы отвечают колебаниям, выводящим атомы из плоскости.

В случае линейной молекулы можно различать продольные колебания, сохраняющие ее прямолинейную форму, и колебания, выводящие атомы с прямой. Так как всего движению n частиц по линии отвечает n степеней свободы, из которых одна поступательная, то число колебаний, не выводящих атомы с прямой, равно $n - 1$. Поскольку же полное число колебательных степеней свободы линейной молекулы есть $3n - 5$, то имеется $2n - 4$ колебаний, выводящих атомы с прямой. Этим колебаниям, однако, отвечают всего $n - 2$ различные частоты, так как каждое из таких колебаний может осуществляться двумя независимыми способами — в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (проходящих через ось молекулы); из соображений симметрии очевидно, что каждая такая пара нормальных колебаний имеет одинаковые частоты.

Задачи²⁾

1. Определить частоты колебаний линейной трехатомной симметричной молекулы ABA (рис. 28). Предполагается, что потенциальная энергия молекулы зависит только от расстояний $A-B$ и $B-A$ и от угла ABA .

Решение. Продольные смещения атомов x_1, x_2, x_3 связаны в силу (24,1) соотношением

$$m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0.$$

С его помощью исключаем x_2 из функции Лагранжа продольного движения молекулы

$$L = \frac{m_A}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_B}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{k_1}{2} [(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2],$$

после чего вводим новые координаты

$$Q_a = x_1 + x_3, \quad Q_s = x_1 - x_3.$$

¹⁾ См. «Квантовая механика», 3-е изд., § 100.

²⁾ Расчеты колебаний более сложных молекул можно найти в книгах: М. В. Волькенштейн, М. А. Ельяшевич, Б. И. Степанов. Колебания молекул.—М.: Гостехиздат, 1949; Г. Герцберг, Колебательные и вращательные спектры многоатомных молекул.—М.: ИЛ, 1949.

В результате получим:

$$L = \frac{m_A \mu}{4m_B} \dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4} \dot{Q}_s^2 - \frac{k_1 \mu^2}{4m_B^2} Q_a^2 - \frac{k_1}{4} Q_s^2$$

($\mu = 2m_A + m_B$ — масса молекулы). Отсюда видно, что Q_a и Q_s являются (с точностью до нормировки) нормальными координатами. Координата Q_a

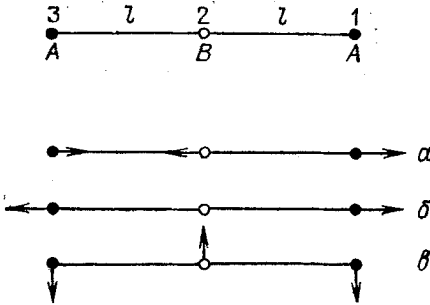


Рис. 28

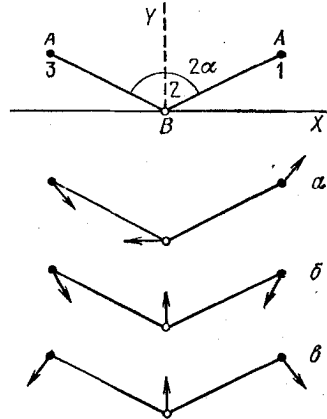


Рис. 29

отвечает антисимметричному относительно середины молекулы колебанию ($x_1 = x_3$; рис. 28, а) с частотой

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_1 \mu}{m_A m_B}}$$

Координата Q_s соответствует симметричному ($x_1 = -x_3$, рис. 28, б) колебанию с частотой

$$\omega_{s1} = \sqrt{k_1/m_A}$$

Поперечные смещения атомов y_1, y_2, y_3 в силу (24,1) и (24,2) связаны соотношениями

$$m_A(y_1 + y_3) + m_B y_2 = 0, \quad y_1 = y_3$$

(симметричное колебание изгиба; рис. 28, в). Потенциальную энергию изгиба молекулы пишем в виде $k_2 l^2 \delta^2/2$, где δ — отклонение угла ABA от значения π ; оно выражается через смещения согласно

$$\delta = \frac{1}{l} [(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)].$$

Выражая все смещения y_1, y_2, y_3 через δ , получим функцию Лагранжа поперечного колебания в виде

$$L = \frac{m_A}{2} (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{m_B}{2} \dot{y}_2^2 - \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2 = \frac{m_A m_B}{4\mu} l^2 \dot{\delta}^2 - \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2,$$

откуда частота

$$\omega_{s2} = \sqrt{2k_2 \mu / m_A m_B}$$

2. То же для молекулы ABA треугольной формы (рис. 29).

Решение. В силу (24,1), (24,2) составляющие смещений и атомов по направлениям X и Y (рис. 29) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 &= 0, \\ m_A(y_1 + y_3) + m_B y_2 &= 0, \\ \sin \alpha (y_1 - y_3) - \cos \alpha (x_1 + x_3) &= 0. \end{aligned}$$

Изменения δl_1 и δl_2 расстояний $A-B$ и $B-A$ получаются путем проектирования векторов $u_1 - u_2$ и $u_3 - u_2$ на направления линий AB и BA :

$$\begin{aligned} \delta l_1 &= (x_1 - x_2) \sin \alpha + (y_1 - y_2) \cos \alpha, \\ \delta l_2 &= -(x_3 - x_2) \sin \alpha + (y_3 - y_2) \cos \alpha. \end{aligned}$$

Изменение же угла ABA получается проектированием тех же векторов на направления, перпендикулярные к отрезкам AB и BA :

$$\delta = \frac{1}{l} [(x_1 - x_2) \cos \alpha - (y_1 - y_2) \sin \alpha] + \frac{1}{l} [-(x_3 - x_2) \cos \alpha - (y_3 - y_2) \sin \alpha].$$

Функция Лагранжа молекулы

$$L = \frac{m_A}{2} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_3^2) + \frac{m_B}{2} \dot{u}_2^2 - \frac{k_1}{2} (\delta l_1^2 + \delta l_2^2) - \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2.$$

Вводим новые координаты

$$Q_a = x_1 + x_3, \quad q_{s1} = x_1 - x_3, \quad q_{s2} = y_1 + y_3.$$

Компоненты векторов и выражаются через них согласно

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} (Q_a + q_{s1}), & x_3 &= \frac{1}{2} (Q_a - q_{s1}), & x_2 &= -\frac{m_A}{m_B} Q_a, \\ y_1 &= \frac{1}{2} (q_{s2} + Q_a \operatorname{ctg} \alpha), & y_3 &= \frac{1}{2} (q_{s2} - Q_a \operatorname{ctg} \alpha), & y_2 &= -\frac{m_A}{m_B} q_{s2}, \end{aligned}$$

а для функции Лагранжа получим после вычисления:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_A}{4} \left(\frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4} \dot{q}_{s1}^2 + \frac{m_A \mu}{4m_B} \dot{q}_{s2}^2 - \\ &\quad - Q_a^2 \frac{k_1}{4} \left(\frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right) - \\ &\quad - \frac{q_{s1}^2}{4} (k_1 \sin^2 \alpha + 2k_2 \cos^2 \alpha) - q_{s2}^2 \frac{\mu^2}{4m_B^2} (k_1 \cos^2 \alpha + 2k_2 \sin^2 \alpha) + \\ &\quad + q_{s1} q_{s2} \frac{\mu}{2m_B} (2k_2 - k_1) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что координата Q_a отвечает нормальному колебанию с частотой

$$\omega_a^2 = \frac{k_1}{m_A} \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right),$$

антисимметричному относительно оси $Y(x_1 = x_3, y_1 = -y_3; \text{рис. 29, а})$.

Координаты же q_{s1} , q_{s2} совместно соответствуют двум колебаниям (симметричным относительно оси Y : $x_1 = -x_3$, $y_1 = y_3$; рис. 29, б и в), частоты которых ω_{s1} , ω_{s2} определяются как корни квадратного (по ω^2) характеристического уравнения

$$\omega^4 - \omega^2 \left[\frac{k_1}{m_A} \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \cos^2 \alpha \right) + \frac{2k_2}{m_A} \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right) \right] + \frac{2\mu k_1 k_2}{m_B m_A^2} = 0.$$

При $2\alpha = \pi$ все эти частоты совпадают с найденными в задаче 1.

3. То же для линейной несимметричной молекулы ABC (рис. 30).

Решение. Продольные (x) и поперечные (y) смещения атомов связаны соотношениями

$$m_A x_1 + m_B x_2 + m_C x_3 = 0,$$

$$m_A y_1 + m_B y_2 + m_C y_3 = 0,$$

$$m_A l_1 y_1 = m_C l_2 y_3.$$

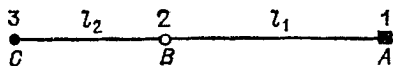


Рис. 30

Потенциальную энергию растяжения и изгиба пишем в виде

$$\frac{k_1}{2} (\delta l_1)^2 + \frac{k_1'}{2} (\delta l_2)^2 + \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2$$

($2l = l_1 + l_2$). Вычисления, аналогичные произведенным в задаче 1, приводят к значению

$$\omega_t^2 = \frac{k_2 l^2}{l_1^2 l_2^2} \left(\frac{l_1^2}{m_C} + \frac{l_2^2}{m_A} + \frac{4l^2}{m_B} \right)$$

для частоты поперечного колебания и к квадратному (по ω^2) уравнению

$$\omega^4 - \omega^2 \left[k_1 \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) + k_1' \left(\frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C} \right) \right] + \frac{\mu k_1 k_1'}{m_A m_B m_C} = 0$$

для частот ω_{t1} , ω_{t2} двух продольных колебаний.

§ 25. Затухающие колебания

До сих пор мы всегда подразумевали, что движение тел происходит в пустоте или что влиянием среды на движение можно пренебречь. В действительности при движении тела в среде последняя оказывает сопротивление, стремящееся замедлить движение. Энергия движущегося тела при этом в конце концов переходит в тепло или, как говорят, диссипируется.

Процесс движения в этих условиях уже не является чисто механическим процессом, а его рассмотрение требует учета движения самой среды и внутреннего теплового состояния как среды, так и тела. В частности, уже нельзя утверждать в общем случае, что ускорение движущегося тела является функцией лишь от его координат и скорости в данный момент времени, т. е. не существует уравнений движения в том смысле, какой они имеют в механике. Таким образом, задача о движении тела в среде уже не является задачей механики.