Координаты же q_{s1}, q_{s2} совместно соответствуют двум колебаниям (симметричным относительно оси Y: $x_1=-x_3$, $y_1=y_3$; рис. 29, *б* и *в*), частоты которых ω_{s1}, ω_{s2} определяются как корни квадратного (по ω^2) характеристического уравнения

$$\omega^4-\omega^2\left[\frac{k_1}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\cos^2\alpha\right)+\frac{2k_2}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)\right]+\frac{2\mu k_1k_2}{m_Bm_A^2}=0.$$

При $2\alpha=\pi$ все эти частоты совпадают с найденными в задаче 1.

3. То же для линейной несимметричной молекулы ABC (рис. 30).

Решение. Продольные (x) и поперечные (y) смещения атомов связаны соотношениями

$$m_Ax_1+m_Bx_2+m_Cx_3=0,$$
$$m_Ay_1+m_By_2+m_Cy_3=0,$$
$$m_Al_1y_1=m_Cl_2y_3.$$

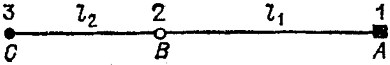

Рис. 30

Потенциальную энергию растяжения и изгиба пишем в виде

$$\frac{k_1}{2}(\delta l_1)^2+\frac{k_1'}{2}(\delta l_2)^2+\frac{k_2l^2}{2}\delta^2$$

$(2l=l_1+l_2)$. Вычисления, аналогичные произведенным в задаче 1, приводят к значению

$$\omega_t^2=\frac{k_2l^2}{l_1^2l_2^2}\left(\frac{l_1^2}{m_C}+\frac{l_2^2}{m_A}+\frac{4l^2}{m_B}\right)$$

для частоты поперечного колебания и к квадратному (по ω^2) уравнению

$$\omega^4-\omega^2\left[k_1\left(\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}\right)+k_1'\left(\frac{1}{m_B}+\frac{1}{m_C}\right)\right]+\frac{\mu k_1k_1'}{m_Am_Bm_C}=0$$

для частот ω_{l1}, ω_{l2} двух продольных колебаний.

§ 25. Затухающие колебания

До сих пор мы всегда подразумевали, что движение тел происходит в пустоте или что влиянием среды на движение можно пренебречь. В действительности при движении тела в среде последняя оказывает сопротивление, стремящееся замедлить движение. Энергия движущегося тела при этом в конце концов переходит в тепло или, как говорят, диссипируется.

Процесс движения в этих условиях уже не является чисто механическим процессом, а его рассмотрение требует учета движения самой среды и внутреннего теплового состояния как среды, так и тела. В частности, уже нельзя утверждать в общем случае, что ускорение движущегося тела является функцией лишь от его координат и скорости в данный момент времени, т. е. не существует уравнений движения в том смысле, какой они имеют в механике. Таким образом, задача о движении тела в среде уже не является задачей механики.

Существует, однако, определенная категория явлений, когда движение в среде может быть приближенно описано с помощью механических уравнений движения путем введения в них некоторых дополнительных членов. Сюда относятся колебания с частотами, малыми по сравнению с частотами, характерными для внутренних диссипативных процессов в среде. При выполнении этого условия можно считать, что на тело действует *сила трения*, зависящая (для заданной однородной среды) только от его скорости.

Если к тому же эта скорость достаточно мала, то можно разложить силу трения по ее степеням. Нулевой член разложения равен нулю, поскольку на неподвижное тело не действует никакой силы трения, и первый неисчезающий член пропорционален скорости. Таким образом, обобщенную силу трения $f_{\text{тр}}$, действующую на систему, совершающую одномерные малые колебания с обобщенной координатой x, можно написать в виде

$$f_{\text{тр}} = -\alpha\dot{x},$$

где α — положительный коэффициент, а знак минус показывает, что сила действует в сторону, противоположную скорости. Добавляя эту силу в правую сторону уравнения движения, получим (ср. (21,4)):

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}. \tag{25,1}$$

Разделим его на m и введем обозначения

$$k/m = \omega_0^2, \quad \alpha/m = 2\lambda. \tag{25,2}$$

ω_0 есть частота свободных колебаний системы в отсутствие трения. Величина λ называется *коэффициентом затухания*[1]).

Таким образом, имеем уравнение

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{25,3}$$

Следуя общим правилам решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами, полагаем $x = e^{rt}$ и находим для r характеристическое уравнение

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0.$$

Общее решение уравнения (25,3) есть

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

Здесь следует различать два случая.

Если $\lambda < \omega_0$, то мы имеем два комплексно сопряженных значения r. Общее решение уравнения движения может быть

---

[1]) Безразмерное произведение λT (где $T = 2\pi/\omega$ — период) называют логарифмическим декрементом затухания.

представлено в этом случае, как

$$x = \mathrm{Re}\left\{A \exp\left(-\lambda t + it\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)\right\},$$

где A — произвольная комплексная постоянная. Иначе можно написать:

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \tag{25,4}$$

где a и α — вещественные постоянные. Выражаемое этими формулами движение представляет собой так называемые *затухающие колебания*. Его можно рассматривать как гармонические колебания с экспоненциально убывающей амплитудой. Скорость убывания амплитуды определяется показателем λ, а «частота» ω колебаний меньше частоты свободных колебаний в отсутствие трения; при $\lambda \ll \omega_0$ разница между ω и ω_0 — второго порядка малости. Уменьшение частоты при трении следовало ожидать заранее, поскольку трение вообще задерживает движение.

Если $\lambda \ll \omega_0$, то за время одного периода $2\pi/\omega$ амплитуда затухающего колебания почти не меняется. В этом случае имеет смысл рассматривать средние (за период) значения квадратов координаты и скорости, пренебрегая при усреднении изменением множителя $e^{-\lambda t}$. Эти средние квадраты, очевидно, пропорциональны $e^{-2\lambda t}$. Поэтому и энергия системы в среднем убывает по закону

$$\bar{E} = E_0 e^{-2\lambda t}, \tag{25,5}$$

где E_0 — начальное значение энергии.

Пусть теперь $\lambda > \omega_0$. Тогда оба значения r вещественны, причем оба отрицательны. Общий вид решения

$$x = c_1 \exp\left[-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t\right] + c_2 \exp\left[-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t\right]. \tag{25,6}$$

Мы видим, что в этом случае, возникающем при достаточно большом трении, движение состоит в убывании $|x|$, т. е. в асимптотическом (при $t \to \infty$) приближении к положению равновесия. Этот тип движения называют *апериодическим затуханием*.

Наконец, в особом случае, когда $\lambda = \omega_0$, характеристическое уравнение имеет всего один (двойной) корень $r = -\lambda$. Как известно, общее решение дифференциального уравнения имеет в этом случае вид

$$x = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\lambda t}. \tag{25,7}$$

Это — особый случай апериодического затухания. Оно тоже не имеет колебательного характера.

Для системы со многими степенями свободы обобщенные силы трения, соответствующие координатам x_i, являются линейными функциями скоростей вида

$$f_{i\,\text{тр}} = -\sum_k \alpha_{ik}\dot{x}_k. \tag{25,8}$$

Из чисто механических соображений нельзя сделать никаких заключений о свойствах симметрии коэффициентов α_{ik} по индексам i и k. Методами же статистической физики можно показать[1]), что всегда

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \tag{25,9}$$

Поэтому выражения (25.8) могут быть написаны в виде производных

$$f_{i\,\text{тр}} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \tag{25,10}$$

от квадратичной формы

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i,\,k} \alpha_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k, \tag{25,11}$$

называемой *диссипативной функцией*.

Силы (25,10) должны быть добавлены к правой стороне уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \tag{25,12}$$

Диссипативная функция имеет сама по себе важный физический смысл — ею определяется интенсивность диссипации энергии в системе. В этом легко убедиться, вычислив производную по времени от механической энергии системы. Имеем:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L\right) = \sum_i \dot{x}_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right) = -\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

Поскольку F — квадратичная функция скоростей, то в силу теоремы Эйлера об однородных функциях сумма в правой стороне равенства равна $2F$. Таким образом,

$$\frac{dE}{dt} = -2F, \tag{25,13}$$

т. е. скорость изменения энергии системы дается удвоенной диссипативной функцией. Так как диссипативные процессы приводят к уменьшению энергии, то должно быть всегда $F > 0$, т. е. квадратичная форма (25,11) существенно положительна.

---

[1]) См. «Статистическая физика», 3-е изд., § 121.

Уравнения малых колебаний при наличии трения получаются добавлением сил (25,8) в правую сторону уравнений (23,5):

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k + \sum_k k_{ik}x_k = -\sum_k \alpha_{ik}\dot{x}_k. \tag{25,14}$$

Положив в этих уравнениях

$$x_k = A_k e^{rt},$$

получим по сокращении на e^{rt} систему линейных алгебраических уравнений для постоянных A_k

$$\sum_k (m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik}) A_k = 0. \tag{25,15}$$

Приравняв нулю определитель этой системы, найдем характеристическое уравнение, определяющее значения r:

$$| m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik} | = 0. \tag{25,16}$$

Это — уравнение степени $2s$ относительно r. Поскольку все его коэффициенты вещественны, то его корни либо вещественны, либо попарно комплексно сопряжены. При этом вещественные корни непременно отрицательны, а комплексные имеют отрицательную вещественную часть. В противном случае координаты и скорости, а с ними и энергия системы экспоненциально возрастали бы со временем, между тем как наличие диссипативных сил должно приводить к уменьшению энергии.

§ 26. Вынужденные колебания при наличии трения

Исследование вынужденных колебаний при наличии трения вполне аналогично произведенному в § 22 рассмотрению колебаний без трения. Мы остановимся здесь подробно на представляющем самостоятельный интерес случае периодической вынуждающей силы.

Прибавив в правой стороне уравнения (25,1) внешнюю силу $f \cos \gamma t$ и разделив на m, получим уравнение движения в виде

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos \gamma t. \tag{26,1}$$

Решение этого уравнения удобно находить в комплексной форме, для чего пишем в правой части $e^{i\gamma t}$ вместо $\cos \gamma t$:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\gamma t}.$$

Частный интеграл ищем в виде $x = Be^{i\gamma t}$ и находим для B:

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)}. \tag{26,2}$$