Уравнения малых колебаний при наличии трения получаются добавлением сил (25,8) в правую сторону уравнений (23,5):

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k + \sum_k k_{ik}x_k = -\sum_k \alpha_{ik}\dot{x}_k. \tag{25,14}$$

Положив в этих уравнениях

$$x_k = A_k e^{rt},$$

получим по сокращении на e^{rt} систему линейных алгебраических уравнений для постоянных A_k

$$\sum_k (m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik}) A_k = 0. \tag{25,15}$$

Приравняв нулю определитель этой системы, найдем характеристическое уравнение, определяющее значения r:

$$|m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik}| = 0. \tag{25,16}$$

Это — уравнение степени $2s$ относительно r. Поскольку все его коэффициенты вещественны, то его корни либо вещественны, либо попарно комплексно сопряжены. При этом вещественные корни непременно отрицательны, а комплексные имеют отрицательную вещественную часть. В противном случае координаты и скорости, а с ними и энергия системы экспоненциально возрастали бы со временем, между тем как наличие диссипативных сил должно приводить к уменьшению энергии.

§ 26. Вынужденные колебания при наличии трения

Исследование вынужденных колебаний при наличии трения вполне аналогично произведенному в § 22 рассмотрению колебаний без трения. Мы остановимся здесь подробно на представляющем самостоятельный интерес случае периодической вынуждающей силы.

Прибавив в правой стороне уравнения (25,1) внешнюю силу $f\cos\gamma t$ и разделив на m, получим уравнение движения в виде

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos\gamma t. \tag{26,1}$$

Решение этого уравнения удобно находить в комплексной форме, для чего пишем в правой части $e^{i\gamma t}$ вместо $\cos\gamma t$:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\gamma t}.$$

Частный интеграл ищем в виде $x = Be^{i\gamma t}$ и находим для B:

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)}. \tag{26,2}$$

Представив B в виде $be^{i\delta}$, имеем для b и δ:

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{26,3}$$

Наконец, отделив вещественную часть от выражения $Be^{i\gamma t} = be^{i(\gamma t + \delta)}$, получим частный интеграл уравнения (26,1), а прибавив к нему общее решение уравнения без правой части (которое мы напишем для определенности для случая $\omega_0 > \lambda$), получим окончательно:

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\gamma t + \delta). \tag{26,4}$$

Первое слагаемое экспоненциально убывает со временем, так что через достаточно большой промежуток времени остается только второй член:

$$x = b\cos(\gamma t + \delta). \tag{26,5}$$

Выражение (26,3) для амплитуды b вынужденного колебания хотя и возрастает при приближении частоты γ к ω_0, но не обращается в бесконечность, как это было при резонансе в отсутствие трения. При заданной амплитуде силы f амплитуда колебания максимальна при частоте $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$; при $\lambda \ll \omega_0$ это значение отличается от ω_0 лишь на величину второго порядка малости.

Рассмотрим область вблизи резонанса. Положим $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$, где ε — малая величина; будем также считать, что $\lambda \ll \omega_0$. Тогда в (26,2) можно приближенно заменить:

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0\varepsilon, \qquad 2i\lambda\gamma \approx 2i\lambda\omega_0,$$

так что

$$B = -\frac{f}{2m(\varepsilon - i\lambda)\omega_0} \tag{26,6}$$

или

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{\lambda}{\varepsilon}. \tag{26,7}$$

Отметим характерную особенность хода изменения разности фаз δ между колебанием и вынуждающей силой при изменении частоты последней. Эта разность всегда отрицательна, т. е. колебание «запаздывает» относительно внешней силы. Вдали от резонанса, со стороны $\gamma < \omega_0$, δ стремится к нулю, а со стороны $\gamma > \omega_0$ — к значению $-\pi$. Изменение δ от нуля до $-\pi$ происходит в узкой (ширины $\sim\lambda$) области частот, близких к ω_0; через значение $-\pi/2$ разность фаз проходит при $\gamma = \omega_0$. Отметим в этой связи, что в отсутствие трения изменение фазы вынужденного колебания на величину π происходит скачком при $\gamma = \omega_0$ (второй член в (22,4) меняет знак); учет трения «размазывает» этот скачок.

При установившемся движении, когда система совершает вынужденные колебания (26,5), ее энергия остается неизменной. В то же время система непрерывно поглощает (от источника внешней силы) энергию, которая диссипируется благодаря наличию трения. Обозначим посредством $I(\gamma)$ количество энергии, поглощаемой в среднем в единицу времени, как функцию частоты внешней силы. Согласно (25,13) имеем:

$$I(\gamma) = 2\bar{F},$$

где $\bar{F}$ — среднее (по периоду колебания) значение диссипативной функции. Для одномерного движения выражение (25,11) диссипативной функции сводится к $F = \alpha\dot{x}^2/2 = \lambda m\dot{x}^2$. Подставив сюда (26,5), получим:

$$F = \lambda m b^2\gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta).$$

Среднее по времени значение квадрата синуса равно $^1/_2$, поэтому

$$I(\gamma) = \lambda m b^2\gamma^2. \qquad (26,8)$$

Вблизи резонанса, подставляя амплитуду колебания из (26,7), имеем:

$$I(\varepsilon) = \frac{f^2}{4m}\frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2}. \qquad (26,9)$$

Такой вид зависимости поглощения от частоты называется *дисперсионным*. Полушириной резонансной кривой (рис. 31) называют значение $|\varepsilon|$, при котором величина $I(\varepsilon)$ уменьшается вдвое по сравнению с ее максимальным значением при $\varepsilon = 0$. Из формулы (26,9) видно, что в данном случае эта полуширина совпадает с показателем затухания λ. Высота же максимума

$$I(0) = f^2/4m\lambda$$

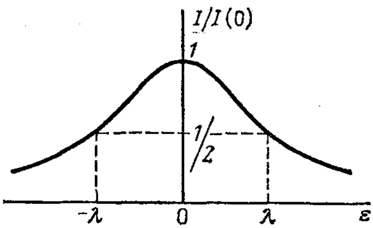

Рис. 31

обратно пропорциональна λ. Таким образом, при уменьшении показателя затухания резонансная кривая становится у́же и выше, т. е. ее максимум становится более острым. Площадь же под резонансной кривой остается при этом неизменной.

Последняя дается интегралом

$$\int_0^\infty I(\gamma)\,d\gamma = \int_{-\omega_0}^\infty I(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Поскольку $I(\varepsilon)$ быстро убывает при увеличении $|\varepsilon|$, так что область больших $|\varepsilon|$ все равно не существенна, можно при интегрировании писать $I(\varepsilon)$ в виде (26,9), а нижний предел заменить на $-\infty$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{f^2\lambda}{4m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2+\lambda^2} = \frac{\pi f^2}{4m}. \tag{26,10}$$

Задача

Определить вынужденные колебания при наличии трения под действием внешней силы $f = f_0 e^{\alpha t}\cos\gamma t$.

Решение. Решаем уравнение движения в комплексном виде

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m}e^{\alpha t + i\gamma t},$$

после чего отделяем вещественную часть решения. В результате получаем вынужденное колебание в виде

$$x = be^{\alpha t}\cos(\gamma t + \delta),$$

где

$$b = \frac{f_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 + \alpha^2 - \gamma^2 + 2\alpha\lambda\right)^2 + 4\gamma^2(\alpha+\lambda)^2}},$$

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{2\gamma(\alpha+\lambda)}{\omega_0^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\lambda}.$$

§ 27. Параметрический резонанс

Существуют такие незамкнутые колебательные системы, в которых внешнее воздействие сводится к изменению со временем ее параметров[1]).

Параметрами одномерной системы являются коэффициенты m и k в функции Лагранжа (21,3); если они зависят от времени, то уравнение движения гласит:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0. \tag{27,1}$$

Путем введения вместо t новой независимой переменной τ согласно $d\tau = dt/m(t)$ это уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + mkx = 0.$$

Поэтому фактически, без всякого ограничения общности, достаточно рассмотреть уравнение движения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)\,x = 0, \tag{27,2}$$

которое получилось бы из (27,1) при $m = \text{const}$.

---

[1]) Простым примером такого рода является маятник, точка подвеса которого совершает заданное периодическое движение в вертикальном направлении (см. задачу 3).