область больших $|\varepsilon|$ все равно не существенна, можно при интегрировании писать $I(\varepsilon)$ в виде (26,9), а нижний предел заменить на $-\infty$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{f^2\lambda}{4m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2+\lambda^2} = \frac{\pi f^2}{4m}. \tag{26,10}$$

Задача

Определить вынужденные колебания при наличии трения под действием внешней силы $f = f_0 e^{\alpha t}\cos\gamma t$.

Решение. Решаем уравнение движения в комплексном виде

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m}e^{\alpha t + i\gamma t},$$

после чего отделяем вещественную часть решения. В результате получаем вынужденное колебание в виде

$$x = be^{\alpha t}\cos(\gamma t + \delta),$$

где

$$b = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2+\alpha^2-\gamma^2+2\alpha\lambda)^2 + 4\gamma^2(\alpha+\lambda)^2}},$$

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{2\gamma(\alpha+\lambda)}{\omega_0^2-\gamma^2+\alpha^2+2\alpha\lambda}.$$

§ 27. Параметрический резонанс

Существуют такие незамкнутые колебательные системы, в которых внешнее воздействие сводится к изменению со временем ее параметров[1]).

Параметрами одномерной системы являются коэффициенты m и k в функции Лагранжа (21,3); если они зависят от времени, то уравнение движения гласит:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0. \tag{27,1}$$

Путем введения вместо t новой независимой переменной τ согласно $d\tau = dt/m(t)$ это уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + mkx = 0.$$

Поэтому фактически, без всякого ограничения общности, достаточно рассмотреть уравнение движения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)\,x = 0, \tag{27,2}$$

которое получилось бы из (27,1) при $m = \text{const}$.

---

[1]) Простым примером такого рода является маятник, точка подвеса которого совершает заданное периодическое движение в вертикальном направлении (см. задачу 3).

Вид функции $\omega(t)$ задается условиями задачи; предположим, что эта функция периодическая с некоторой частотой γ (и периодом $T=2\pi/\gamma$). Это значит, что

$$\omega(t+T)=\omega(t),$$

а потому и все уравнение (27,2) инвариантно по отношению к преобразованию $t\to t+T$. Отсюда следует, что если $x(t)$ есть решение уравнения, то и функция $x(t+T)$ тоже есть решение. Другими словами, если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два независимых интеграла уравнения (27,2), то при замене $t\to t+T$ они преобразуются линейным образом друг через друга. При этом можно[1]) выбрать x_1 и x_2 таким образом, чтобы их изменение при замене t на $t+T$ сводилось просто к умножению на постоянный множитель

$$x_1(t+T)=\mu_1 x_1(t),\quad x_2(t+T)=\mu_2 x_2(t).$$

Наиболее общий вид функций, обладающих таким свойством, есть

$$x_1(t)=\mu_1^{t/T}\Pi_1(t),\quad x_2(t)=\mu_2^{t/T}\Pi_2(t), \tag{27,3}$$

где $\Pi_1(t)$ и $\Pi_2(t)$ — чисто периодические функции времени (с периодом T).

Постоянные μ_1 и μ_2 в этих функциях должны быть связаны друг с другом определенным соотношением. Действительно, умножив уравнения

$$\ddot{x}_1+\omega^2(t)x_1=0,\quad \ddot{x}_2+\omega^2(t)x_2=0$$

соответственно на x_2 и x_1 и вычтя их почленно одно из другого, получим:

$$\ddot{x}_1x_2-\ddot{x}_2x_1=\frac{d}{dt}(\dot{x}_1x_2-x_1\dot{x}_2)=0$$

или

$$\dot{x}_1x_2-x_1\dot{x}_2=\mathrm{const}. \tag{27,4}$$

Но при любых функциях $x_1(t)$ и $x_2(t)$ вида (27,3) выражение в левой стороне этого равенства умножается на $\mu_1\mu_2$ при изменении аргумента t на $t+T$. Поэтому ясно, что соблюдение равенства (27,4) во всяком случае требует, чтобы было

$$\mu_1\mu_2=1. \tag{27,5}$$

Дальнейшие заключения о постоянных μ_1, μ_2 можно сделать, исходя из факта вещественности коэффициентов уравнения (27,2). Если $x(t)$ есть какой-либо интеграл такого уравнения, то

[1]) Этот выбор эквивалентен приведению к диагональному виду матрицы линейных преобразований $x_1(t)$ и $x_2(t)$, что требует решения соответствующего секулярного квадратного уравнения. Мы предполагаем, что корни этого уравнения не совпадают.

и комплексно сопряженная функция $x^*(t)$ должна удовлетворять тому же уравнению. Отсюда следует, что пара постоянных μ_1, μ_2 должна совпадать с парой $\overset{*}{\mu}_1$, $\overset{*}{\mu}_2$, т. е. должно быть либо $\mu_1 = \overset{*}{\mu}_2$, либо μ_1 и μ_2 вещественны. В первом случае, учитывая (27,5), имеем $\mu_1 = 1/\overset{*}{\mu}_1$, т. е. $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$; постоянные μ_1 и μ_2 по модулю равны единице.

Во втором же случае два независимых интеграла уравнения (27,2) имеют вид

$$x_1(t) = \mu^{t/T}\Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu^{-t/T}\Pi_2(t) \tag{27,6}$$

с отличным от единицы положительным или отрицательным вещественным числом μ. Одна из этих функций (первая или вторая при $|\mu| > 1$ или $|\mu| < 1$) экспоненциально возрастает со временем. Это значит, что состояние покоя системы (в положении равновесия $x = 0$) будет неустойчивым: достаточно сколь угодно слабого отклонения от этого состояния, чтобы появившееся смещение x стало быстро возрастать со временем. Это явление называется *параметрическим резонансом.*

Обратим внимание на то, что при строго равных нулю начальных значениях x и $\dot{x}$ они оставались бы равными нулю и в дальнейшем в отличие от обычного резонанса (§ 22), в котором возрастание смещения со временем (пропорциональное t) происходит и от равного нулю начального значения.

Выясним условия возникновения параметрического резонанса в важном случае, когда функция $\omega(t)$ мало отличается от некоторой постоянной величины ω_0 и является простой периодической функцией

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h\cos\gamma t), \tag{27,7}$$

где постоянная $h \ll 1$ (мы будем считать h положительной, чего всегда можно добиться надлежащим выбором начала отсчета времени). Как мы увидим ниже, наиболее интенсивным образом параметрический резонанс возникает, если частота функции $\omega(t)$ близка к удвоенной частоте ω_0. Поэтому положим:

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon,$$

где $\varepsilon \ll \omega_0$.

Решение уравнения движения [1])

$$\ddot{x} + \omega_0^2[1 + h\cos(2\omega_0 + \varepsilon)t]\,x = 0 \tag{27,8}$$

будем искать в виде

$$x = a(t)\cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + b(t)\sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t, \tag{27,9}$$

[1]) Уравнение такого вида (с произвольными γ и h) называются в математической физике уравнением Матьё.

где $a(t)$ и $b(t)$ — медленно (по сравнению с множителями cos и sin) меняющиеся функции времени. Такой вид решения, разумеется, не является точным. В действительности функция $x(t)$ содержит также члены с частотами, отличающимися от $\omega_0+\varepsilon/2$ на целое кратное от $(2\omega_0+\varepsilon)$; эти члены, однако, высшего порядка малости по h, и в первом приближении ими можно пренебречь (см. задачу 1).

Подставим (27,9) в (27,8) и произведем вычисления, сохраняя лишь члены первого порядка по ε. При этом предположим, что $\dot{a} \sim \varepsilon a$, $\dot{b} \sim \varepsilon b$ (правильность этого предположения в условиях резонанса подтвердится результатом). Произведения тригонометрических множителей разложим в суммы

$$\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\cdot\cos(2\omega_0+\varepsilon)t = \frac{1}{2}\cos\left(3\omega_0+\frac{3\varepsilon}{2}\right)t+\frac{1}{2}\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

и т. п. и в соответствии со сказанным выше опустить члены с частотами $3(\omega_0+\varepsilon/2)$. В результате получим:

$$-\left(2\dot{a}+b\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}b\right)\omega_0\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+ +\left(2\dot{b}-a\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}a\right)\omega_0\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t=0.$$

Выполнение этого равенства требует одновременного обращения в нуль коэффициентов при каждом из множителей sin и cos. Отсюда получаем систему двух линейных дифференциальных уравнений для функций $a(t)$ и $b(t)$. Следуя общим правилам, ищем решение, пропорциональное e^{st}. Тогда

$$sa+\frac{1}{2}\left(\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}\right)b=0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon-\frac{h\omega_0}{2}\right)a-sb=0,$$

и условие совместности этих двух алгебраических уравнений дает:

$$s^2=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-\varepsilon^2\right]. \tag{27,10}$$

Условие возникновения параметрического резонанса заключается в вещественности s (т. е. $s^2>0$)[1]. Таким образом, он имеет место в интервале

$$-h\omega_0/2<\varepsilon<h\omega_0/2 \tag{27,11}$$

---

[1]) Постоянная μ в (27,6) связана с s посредством $\mu=-e^{s\pi/\omega_0}$ (при замене t на $t+2\pi/2\omega_0$ cos и sin в (27,9) меняют знак).

вокруг частоты $2\omega_0$ [1]). Ширина этого интервала пропорциональна h, и такого же порядка осуществляющиеся в нем значения показателя усиления колебаний s.

Параметрический резонанс имеет место также при частотах γ изменения параметра системы, близких к значениям вида $2\omega_0/n$, где n — любое целое число. Однако ширина резонансных областей (областей неустойчивости) с увеличением n быстро уменьшается — как h^n (см. задачу 2). Так же уменьшаются и значения показателя усиления колебаний в них.

Явление параметрического резонанса существует и при наличии слабого трения в системе, но область неустойчивости при этом несколько сужается. Как мы видели в § 25, трение приводит к затуханию амплитуды колебаний по закону $e^{-\lambda t}$. Поэтому усиление колебаний при параметрическом резонансе происходит, как $e^{(s-\lambda)t}$ (с положительным s, даваемым решением задачи без трения), а граница области неустойчивости определяется равенством $s-\lambda=0$. Так, используя s из (27,10), получим для резонансной области вместо (27,11) неравенства

$$-\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-4\lambda^2}<\varepsilon<\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-4\lambda^2}. \qquad (27,12)$$

Обратим внимание на то, что при этом резонанс оказывается возможным не при сколь угодно малой амплитуде h, а лишь начиная с определенного «порога» h_k, равного в случае (27,12)

$$h_k=4\lambda/\omega_0.$$

Можно показать, что для резонансов вблизи частот $2\omega_0/n$ величина порога h_k пропорциональна $\lambda^{1/n}$, т. е. возрастает с увеличением n.

Задачи

1. Определить границы области неустойчивости при резонансе вблизи $\gamma=2\omega_0$ с точностью до величин порядка h^2.

Решение. Ищем решение уравнения (27,8) в виде

$$x=a_0\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+b_0\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$+a_1\cos 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+b_1\sin 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t,$$

учитывая в нем (по сравнению с (27,9)) также и члены следующего порядка по h. Интересуясь лишь границами области неустойчивости, предполагаем коэффициенты a_0, b_0, a_1, b_1 постоянными (в соответствии с замечанием, сде-

[1]) Если интересоваться лишь границами области резонанса (не интересуясь выражением для s внутри нее), то можно упростить вычисления, заметив, что на этих границах $s=0$, т. е. коэффициенты a и b в (27,9) постоянны; при этом мы сразу получим значения $\varepsilon=\pm h\omega_0/2$, отвечающие границам области (27,11).

ланным в сноске на стр. 110). При подстановке в уравнение (27,8) произведения тригонометрических функций разлагаем в суммы, опуская при этом члены с частотами $5(\omega_0+\varepsilon/2)$, которые нужны были бы лишь в еще более высоком приближении. Получаем:

$$\left[-a_0\left(\omega_0\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)+\frac{h\omega_0^2}{2}a_0+\frac{h\omega_0^2}{2}a_1\right]\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$+\left[-b_0\left(\omega_0\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)-\frac{h\omega_0^2}{2}b_0+\frac{h\omega_0^2}{2}b_1\right]\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$+\left[\frac{h\omega_0^2}{2}a_0-8\omega_0^2a_1\right]\cos 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$+\left[\frac{h\omega_0^2}{2}b_0-8\omega_0^2b_1\right]\sin 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t=0.$$

В членах с частотами $\omega_0+\varepsilon/2$ сохранены величины первого и второго порядка малости, а в членах с частотами $3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ — члены первого порядка. Каждое из выражений в квадратных скобках должно обращаться в нуль в отдельности. Из двух последних имеем:

$$a_1=\frac{h}{16}a_0,\qquad b_1=\frac{h}{16}b_0,$$

после чего из двух первых находим:

$$\omega_0\varepsilon\pm\frac{h\omega_0^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4}-\frac{h^2\omega_0^2}{32}=0.$$

Решая это уравнение с точностью до членов порядка h^2, получим искомые граничные значения ε:

$$\varepsilon=\pm\frac{h\omega_0}{2}-\frac{1}{32}h^2\omega_0.$$

2. Определить границы области неустойчивости при резонансе вблизи $\gamma=\omega_0$.

Решение. Написав $\gamma=\omega_0+\varepsilon$, получаем уравнение движения

$$\ddot{x}+\omega_0^2\left[1+h\cos(\omega_0+\varepsilon)t\right]x=0.$$

Имея в виду, что искомые граничные значения $\varepsilon\sim h^2$, ищем решение в виде

$$x=a_0\cos(\omega_0+\varepsilon)t+b_0\sin(\omega_0+\varepsilon)t+a_1\cos 2(\omega_0+\varepsilon)t+$$
$$+b_1\sin 2(\omega_0+\varepsilon)t+c_1,$$

учитывая в нем сразу члены двух первых порядков. Для определения границ неустойчивости снова предполагаем коэффициенты постоянными и получаем:

$$\left[-2\omega_0\varepsilon a_0+\frac{h\omega_0^2}{2}a_1+h\omega_0^2c_1\right]\cos(\omega_0+\varepsilon)t+$$
$$+\left[-2\omega_0\varepsilon b_0+\frac{h\omega_0^2}{2}b_1\right]\sin(\omega_0+\varepsilon)t+\left[-3\omega_0^2a_1+\frac{h\omega_0^2}{2}a_0\right]\cos 2(\omega_0+\varepsilon)t+$$
$$+\left[-3\omega_0^2b_1+\frac{h\omega_0^2}{2}b_0\right]\sin 2(\omega_0+\varepsilon)t+\left[c_1\omega_0^2+\frac{h\omega_0^2}{2}a_0\right]=0.$$

Отсюда находим:

$$a_1 = \frac{h}{6} a_0, \qquad b_1 = \frac{h}{6} b_0, \qquad c_1 = -\frac{h}{2} a_0,$$

и затем две границы области неустойчивости:

$$\varepsilon = -\frac{5}{24} h^2 \omega_0, \qquad \varepsilon = \frac{1}{24} h^2 \omega_0.$$

3. Найти условия параметрического резонанса для малых колебаний плоского маятника с колеблющейся в вертикальном направлении точкой подвеса.

Решение. По найденной в задаче 3, в) § 5 функции Лагранжа найдем для малых ($\varphi \ll 1$) колебаний уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \left(1 + 4\frac{a}{l} \cos(2\omega_0 + \varepsilon) t\right) \varphi = 0$$

(где $\omega_0^2 = g/l$). Отсюда видно, что роль введенного в тексте параметра h играет отношение $4a/l$. Условие (27,11), например, принимает вид

$$|\varepsilon| < 2a\sqrt{g}/l^{3/2}.$$

§ 28. Ангармонические колебания

Вся изложенная выше теория малых колебаний основана на разложении потенциальной и кинетической энергий системы по координатам и скоростям с оставлением лишь членов второго порядка; при этом уравнения движения линейны, в связи с чем в этом приближении говорят о *линейных* колебаниях. Хотя такое разложение вполне законно при условии достаточной малости амплитуд колебаний, однако учет следующих приближений (так называемой *ангармоничности* или *нелинейности* колебаний) приводит к появлению некоторых хотя и слабых, но качественно новых особенностей движения.

Произведем разложение функции Лагранжа до членов третьего порядка. В потенциальной энергии при этом появятся члены третьей степени по координатам x_i, в кинетической же энергии — члены, содержащие произведения скоростей и координат вида $\dot{x}_i \dot{x}_k x_l$; это отличие от прежнего выражения (23,3) связано с оставлением членов первого порядка по x в разложении функций $a_{ik}(q)$. Таким образом, функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k) + \frac{1}{2} \sum_{i,k,l} n_{ikl} \dot{x}_i \dot{x}_k x_l - \frac{1}{3} \sum_{i,k,l} l_{ikl} x_i x_k x_l, \tag{28,1}$$

где n_{ikl}, l_{ikl} — новые постоянные коэффициенты.

Если от произвольных координат x_i перейти к нормальным координатам (линейного приближения) Q_α, то в силу линейности этого преобразования третья и четвертая суммы в (28,1) перейдут в аналогичные суммы, в которых вместо координат x_i