Отсюда находим:

$$a_1 = \frac{h}{6} a_0, \qquad b_1 = \frac{h}{6} b_0, \qquad c_1 = -\frac{h}{2} a_0,$$

и затем две границы области неустойчивости:

$$\varepsilon = -\frac{5}{24} h^2 \omega_0, \qquad \varepsilon = \frac{1}{24} h^2 \omega_0.$$

3. Найти условия параметрического резонанса для малых колебаний плоского маятника с колеблющейся в вертикальном направлении точкой подвеса.

Решение. По найденной в задаче 3, в) § 5 функции Лагранжа найдем для малых ($\varphi \ll 1$) колебаний уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \left(1 + 4 \frac{a}{l} \cos(2\omega_0 + \varepsilon) t\right) \varphi = 0$$

(где $\omega_0^2 = g/l$). Отсюда видно, что роль введенного в тексте параметра $h$ играет отношение $4a/l$. Условие (27,11), например, принимает вид

$$|\varepsilon| < 2a\sqrt{g}/l^{3/2}.$$

## § 28. Ангармонические колебания

Вся изложенная выше теория малых колебаний основана на разложении потенциальной и кинетической энергий системы по координатам и скоростям с оставлением лишь членов второго порядка; при этом уравнения движения линейны, в связи с чем в этом приближении говорят о *линейных* колебаниях. Хотя такое разложение вполне законно при условии достаточной малости амплитуд колебаний, однако учет следующих приближений (так называемой *ангармоничности* или *нелинейности* колебаний) приводит к появлению некоторых хотя и слабых, но качественно новых особенностей движения.

Произведем разложение функции Лагранжа до членов третьего порядка. В потенциальной энергии при этом появятся члены третьей степени по координатам $x_i$, в кинетической же энергии — члены, содержащие произведения скоростей и координат вида $\dot{x}_i \dot{x}_k x_l$; это отличие от прежнего выражения (23,3) связано с оставлением членов первого порядка по $x$ в разложении функций $a_{ik}(q)$. Таким образом, функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k) + \frac{1}{2} \sum_{i,k,l} n_{ikl} \dot{x}_i \dot{x}_k x_l - \frac{1}{3} \sum_{i,k,l} l_{ikl} x_i x_k x_l, \tag{28,1}$$

где $n_{ikl}$, $l_{ikl}$ — новые постоянные коэффициенты.

Если от произвольных координат $x_i$ перейти к нормальным координатам (линейного приближения) $Q_\alpha$, то в силу линейности этого преобразования третья и четвертая суммы в (28,1) перейдут в аналогичные суммы, в которых вместо координат $x_i$

и скоростей $\dot{x}_i$ будут стоять $Q_\alpha$ и $\dot{Q}_\alpha$. Обозначив коэффициенты в этих суммах через $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ и $\mu_{\alpha\beta\gamma}$, получим функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{1}{2}\sum\left(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\alpha\dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_{\alpha\beta\gamma}Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma. \tag{28,2}$$

Мы не станем выписывать полностью следующих из этой лагранжевой функции уравнений движения. Существенно, что они имеют вид

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}), \tag{28,3}$$

где $f_\alpha$ — однородные функции второго порядка от координат $Q$ и их производных по времени.

Применяя метод последовательных приближений, ищем решение этих уравнений в виде

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)}, \tag{28,4}$$

где $Q_\alpha^{(2)} \ll Q_\alpha^{(1)}$, а функции $Q_\alpha^{(1)}$ удовлетворяют «невозмущенным» уравнениям

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = 0,$$

т. е. представляют собой обычные гармонические колебания

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha\cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha). \tag{28,5}$$

Сохраняя в следующем приближении в правой стороне уравнений (28,3) лишь члены второго порядка малости, получим для величин чин $Q_\alpha^{(2)}$ уравнения

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha\left(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}\right), \tag{28,6}$$

где в правую часть должны быть подставлены выражения (28,5). В результате мы получим линейные неоднородные дифференциальные уравнения, правые части которых можно преобразовать к суммам простых периодических функций. Так, например,

$$Q_\alpha^{(1)}Q_\beta^{(1)} = a_\alpha a_\beta\cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha)\cos(\omega_\beta t + \alpha_\beta) =$$

$$= \frac{1}{2}a_\alpha a_\beta\left\{\cos\left[(\omega_\alpha + \omega_\beta)t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta\right] + \cos\left[(\omega_\alpha - \omega_\beta)t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta\right]\right\}.$$

Таким образом, в правых частях уравнений (28,6) находятся члены, соответствующие колебаниям с частотами, равными суммам и разностям собственных частот системы. Решение уравнений следует искать в виде, содержащем такие же периодические множители, и мы приходим к выводу, что во втором приближении на нормальные колебания системы с частотами $\omega_\alpha$ накладываются дополнительные колебания с частотами

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta \tag{28,7}$$

(в том числе удвоенные частоты $2\omega_\alpha$ и частота 0, соответствующая постоянному смещению). Эти частоты называются *комбинационными*. Амплитуды комбинационных колебаний пропорциональны произведениям $a_\alpha a_\beta$ (или квадратам $a_\alpha^2$) соответствующих нормальных колебаний.

В следующих приближениях при учете членов более высокого порядка в разложении функции Лагранжа возникают комбинационные колебания с частотами, являющимися суммами и разностями большего числа частот $\omega_\alpha$. Кроме того, однако, возникает еще и новое явление.

Дело в том, что уже в третьем приближении среди комбинационных частот появляются частоты, совпадающие с исходными $\omega_\alpha$ $(\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\beta)$. При применении описанного выше метода в правой части уравнений движения будут находиться, следовательно, резонансные члены, которые приведут к возникновению в решении членов с возрастающей со временем амплитудой. Между тем, физически очевидно, что в замкнутой системе в отсутствие внешнего источника энергии не может происходить самопроизвольное нарастание интенсивности колебаний.

В действительности в высших приближениях происходит изменение основных частот $\omega_\alpha$ по сравнению с их «невозмущенными» значениями $\omega_\alpha^{(0)}$, фигурирующими в квадратичном выражении потенциальной энергии. Появление же возрастающих членов в решении связано с разложением типа

$$\cos\left(\omega_\alpha^{(0)} + \Delta\omega_\alpha\right)t \approx \cos\omega_\alpha^{(0)}t - t\Delta\omega_\alpha \sin\omega_\alpha^{(0)}t,$$

явно незаконным при достаточно больших $t$.

Поэтому при переходе к следующим приближениям метод последовательных приближений должен быть видоизменен так, чтобы фигурирующие в решении периодические множители с самого начала содержали точные, а не приближенные значения частот. Изменения же частот сами определятся в результате решения уравнений как раз из условия отсутствия резонансных членов.

Продемонстрируем этот метод на ангармонических колебаниях с одной степенью свободы, написав функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 - \frac{m\alpha}{3}x^3 - \frac{m\beta}{4}x^4. \tag{28,8}$$

Соответствующее уравнение движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3. \tag{28,9}$$

Мы будем искать его решение в виде ряда последовательных приближений

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)},$$

причем

$$x^{(1)} = a\cos\omega t \tag{28,10}$$

с точным значением $\omega$, которое само будем затем искать в виде ряда $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \ldots$ (начальную фазу в $x^{(1)}$ можно всегда обратить в нуль надлежащим выбором начала отсчета времени). При этом, однако, уравнение движения в виде (28,9) не вполне удобно, так как при подстановке в него (28,10) левая сторона равенства не обратится строго в нуль. Поэтому перепишем его предварительно в эквивалентном виде

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{x}. \tag{28,11}$$

Положив здесь $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$ и опустив члены выше второго порядка малости, получим для $x^{(2)}$ уравнение

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\alpha a^2\cos^2\omega t + 2\omega_0\omega^{(1)}a\cos\omega t =$$

$$= -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2}\cos 2\omega t + 2\omega_0\omega^{(1)}a\cos\omega t.$$

Условие отсутствия резонансного члена в правой стороне равенства дает просто $\omega^{(1)} = 0$ в соответствии с изложенным в начале параграфа методом нахождения второго приближения. После этого, решая обычным способом неоднородное линейное уравнение, получим:

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}\cos 2\omega t. \tag{28,12}$$

Далее, положив в (28,11) $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$, $\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$, получим уравнение для $x^{(3)}$

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)} - \beta x^{(1)3} + 2\omega_0\omega^{(2)}x^{(1)}$$

или, подставив в правую часть выражения (28,10) и (28,12) после простого преобразования:

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} =$$

$$= -a^3\left[\frac{\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}\right]\cos 3\omega t + a\left[2\omega_0\omega^{(2)} + \frac{5a^2\alpha^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4}a^2\beta\right]\cos\omega t.$$

Приравнивая нулю коэффициент при резонансном множителе $\cos\omega t$, найдем поправку к основной частоте, пропорциональную квадрату амплитуды колебания:

$$\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right)a^2. \tag{28,13}$$

Комбинационное же колебание третьего порядка

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2}\right)\cos 3\omega t. \qquad (28,14)$$

## § 29. Резонанс в нелинейных колебаниях

Учет ангармонических членов при вынужденных колебаниях системы приводит к появлению существенно новых особенностей в резонансных явлениях.

Добавив в правой стороне уравнения (28,9) внешнюю периодическую (с частотой $\gamma$) силу, получим:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos\gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3; \qquad (29,1)$$

здесь написана также сила трения с показателем затухания $\lambda$ (предполагаемым ниже малым). Строго говоря, при учете нелинейных членов в уравнении свободных колебаний должны учитываться также члены высших порядков в амплитуде вынуждающей силы, соответствующие возможной зависимости ее от смещения $x$. Мы не пишем этих членов лишь с целью упрощения формул; они не меняют качественной картины явлений.

Пусть

$$\gamma = \omega_0 + \varepsilon$$

(с малым $\varepsilon$), т. е. мы находимся вблизи обычного резонанса. Для выяснения характера возникающего движения можно обойтись без непосредственного исследования уравнения (29,1), если воспользоваться следующими соображениями.

В линейном приближении зависимость амплитуды $b$ вынужденного колебания от амплитуды $f$ и частоты $\gamma$ внешней силы дается вблизи резонанса формулой (26,7), которую напишем в виде

$$b^2(\varepsilon^2 + \lambda^2) = f^2/4m^2\omega_0^2. \qquad (29,2)$$

Нелинейность колебаний приводит к появлению зависимости их собственной частоты от амплитуды; напишем ее в виде

$$\omega_0 + \varkappa b^2, \qquad (29,3)$$

где постоянная $\varkappa$ выражается определенным образом через коэффициент ангармоничности (см. (28,13)). Соответственно этому заменяем в формуле (29,2) (точнее в малой разности $\gamma - \omega_0$) $\omega_0$ на $\omega_0 + \varkappa b^2$.

Сохранив обозначение $\varepsilon = \gamma - \omega_0$, получим в результате уравнение

$$b^2[(\varepsilon - \varkappa b^2)^2 + \lambda^2] = f^2/4m^2\omega_0^2 \qquad (29,4)$$