Комбинационное же колебание третьего порядка

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2}\right)\cos 3\omega t. \tag{28,14}$$

§ 29. Резонанс в нелинейных колебаниях

Учет ангармонических членов при вынужденных колебаниях системы приводит к появлению существенно новых особенностей в резонансных явлениях.

Добавив в правой стороне уравнения (28,9) внешнюю периодическую (с частотой γ) силу, получим:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos\gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3; \tag{29,1}$$

здесь написана также сила трения с показателем затухания λ (предполагаемым ниже малым). Строго говоря, при учете нелинейных членов в уравнении свободных колебаний должны учитываться также члены высших порядков в амплитуде вынуждающей силы, соответствующие возможной зависимости ее от смещения x. Мы не пишем этих членов лишь с целью упрощения формул; они не меняют качественной картины явлений.

Пусть

$$\gamma = \omega_0 + \varepsilon$$

(с малым ε), т. е. мы находимся вблизи обычного резонанса. Для выяснения характера возникающего движения можно обойтись без непосредственного исследования уравнения (29,1), если воспользоваться следующими соображениями.

В линейном приближении зависимость амплитуды b вынужденного колебания от амплитуды f и частоты γ внешней силы дается вблизи резонанса формулой (26,7), которую напишем в виде

$$b^2(\varepsilon^2 + \lambda^2) = f^2/4m^2\omega_0^2. \tag{29,2}$$

Нелинейность колебаний приводит к появлению зависимости их собственной частоты от амплитуды; напишем ее в виде

$$\omega_0 + \varkappa b^2, \tag{29,3}$$

где постоянная $\varkappa$ выражается определенным образом через коэффициент ангармоничности (см. (28,13)). Соответственно этому заменяем в формуле (29,2) (точнее в малой разности $\gamma - \omega_0$) ω_0 на $\omega_0 + \varkappa b^2$.

Сохранив обозначение $\varepsilon = \gamma - \omega_0$, получим в результате уравнение

$$b^2[(\varepsilon - \varkappa b^2)^2 + \lambda^2] = f^2/4m^2\omega_0^2 \tag{29,4}$$

или

$$\varepsilon = \varkappa b^2 \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2m\omega_0 b}\right)^2 - \lambda^2}.$$

Уравнение (29,4), кубическое по отношению к b^2, и его вещественные корни определяют амплитуду вынужденных колебаний. Рассмотрим зависимость этой амплитуды от частоты внешней силы при заданной амплитуде силы f.

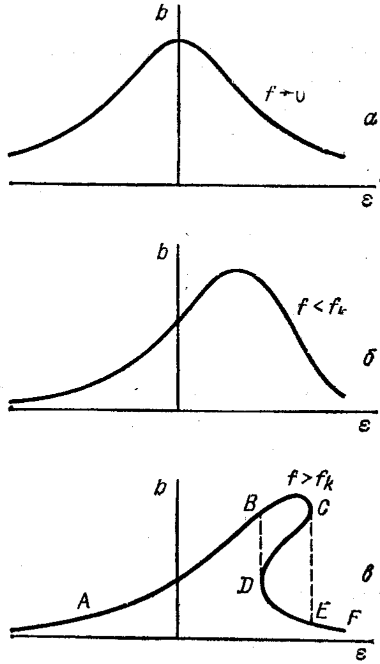

Рис. 32

При достаточно малых значениях f амплитуда b тоже мала, так что можно пренебречь в (29,4) степенями b выше второй, и мы возвращаемся к зависимости $b(\varepsilon)$ (29,2), изображающейся симметричной кривой с максимумом в точке $\varepsilon = 0$ (рис. 32, *а*). По мере увеличения f кривая деформируется, сохраняя сначала свой характер — с одним максимумом (рис. 32, *б*); последний смещается (при $\varkappa > 0$) в сторону положительных ε. Из трех корней уравнения (29,4) при этом вещественен лишь один.

Однако, начиная с определенного значения $f = f_k$ (которое мы определим ниже), характер кривой меняется. При каждом значении $f > f_k$ существует определенная область частот, в которой уравнение (29,4) имеет три вещественных корня; ей отвечает участок $BCDE$ кривой на рис. 32, *в*.

Границы этой области определяются условием $\frac{db}{d\varepsilon} = \infty$ в точках D и C. Продифференцировав уравнение (29,4) по ε, получим:

$$\frac{db}{d\varepsilon} = \frac{-\varepsilon b + \varkappa b^3}{\varepsilon^2 + \lambda^2 - 4\varkappa\varepsilon b^2 + 3\varkappa^2 b^4}.$$

Поэтому положение точек D и C определяется совместным решением уравнений

$$\varepsilon^2 - 4\varkappa b^2\varepsilon + 3\varkappa^2 b^4 + \lambda^2 = 0 \qquad (29,5)$$

и (29,4); соответствующие значения ε оба положительны. Наибольшее значение амплитуды достигается в точке, где $\frac{db}{d\varepsilon}=0$. При этом $\varepsilon=\varkappa b^2$, и из (29,4) имеем:

$$b_{\max}=f/2m\omega_0\lambda; \qquad (29,6)$$

это значение совпадает с максимумом, даваемым зависимостью (29,2).

Можно показать (на чем мы не будем здесь останавливаться[1])), что из трех вещественных корней уравнения (29,4) средний (т. е. участок CD кривой, изображенный на рис. 32, *в* штриховой линией соответствует неустойчивым колебаниям системы: любое сколь угодно слабое воздействие на систему, находящуюся в таком состоянии, привело бы к переходу к колебательному режиму, отвечающему большему или меньшему корню (т. е. участкам BC или DE). Таким образом, реальным колебаниям системы соответствуют лишь ветви ABC и DEF. Замечательной особенностью является при этом наличие области частот, допускающих две различные амплитуды колебаний. Так, при постепенном увеличении частоты внешней силы амплитуда вынужденных колебаний будет возрастать, следуя кривой ABC. В точке C произойдет «срыв» амплитуды, которая скачком упадет до значения, отвечающего точке E, и затем (при дальнейшем увеличении частоты) будет меняться вдоль кривой EF. Если теперь вновь уменьшать частоту, то амплитуда вынужденных колебаний будет меняться вдоль кривой FD, в точке D скачком возрастает до B и затем будет уменьшаться вдоль BA.

Для вычисления значения f_k замечаем, что это есть то значение f, при котором оба корня квадратного (по b^2) уравнения (29,5) совпадают; при $f=f_k$ весь участок CD сводится к одной точке перегиба. Приравняв нулю дискриминант квадратного уравнения (29,5), получим $\varepsilon^2=3\lambda^2$; соответствующий корень уравнения: $\varkappa b^2=2\varepsilon/3$. Подставляя эти значения b и ε в (29,4), найдем:

$$f_k^2=32m^2\omega_0^2\lambda^3/3\sqrt{3}\,|\varkappa|. \qquad (29,7)$$

Наряду с изменением характера резонансных явлений при частотах $\gamma\approx\omega_0$ нелинейность колебаний приводит также к появлению новых резонансов, в которых колебания с частотой, близкой к ω_0, возбуждаются внешней силой с частотой, существенно отличающейся от ω_0.

Пусть частота внешней силы $\gamma\approx\omega_0/2$, т. е.

$$\gamma=\omega_0/2+\varepsilon.$$

[1]) Доказательство можно найти, например, в книге Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского, «Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний». — М.: Физматгиз, 1958.

В первом, линейном, приближении она возбуждает в системе колебания с той же частотой и с амплитудой, пропорциональной амплитуде силы:

$$x^{(1)} = \frac{4f}{3m\omega_0^2}\cos\left(\frac{\omega_0}{2}+\varepsilon\right)t$$

(согласно формуле (22,4)). Но при учете нелинейных членов, во втором приближении, эти колебания приведут к появлению в правой стороне уравнения движения (29,1) члена с частотой $2\gamma \approx \omega_0$. Именно, подставив $x^{(1)}$ в уравнение

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)\,2} + \beta x^{(2)\,3} = -\alpha x^{(1)\,2},$$

введя косинус удвоенного угла и сохраняя в правой стороне лишь резонансный член, получим:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)\,2} + \beta x^{(2)\,3} = -\frac{8\alpha f^2}{9m^2\omega_0^4}\cos(\omega_0+2\varepsilon)t. \quad (29,8)$$

Это уравнение отличается от уравнения (29,1) лишь тем, что вместо амплитуды силы f в нем стоит выражение, пропорциональное квадрату f^2. Это значит, что возникает резонанс такого же характера, как и рассмотренный выше резонанс на частотах $\gamma \approx \omega_0$, но с меньшей интенсивностью. Зависимость $b(\varepsilon)$ получается заменой f на $-8\alpha f^2/9m\omega_0^4$ (и ε на 2ε) в уравнении (29,4):

$$b^2\left[(2\varepsilon - \varkappa b^2)^2 + \lambda^2\right] = 16\alpha^2 f^4/81m^4\omega_0^{10}. \quad (29,9)$$

Пусть теперь частота внешней силы

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon.$$

В первом приближении имеем:

$$x^{(1)} = -\frac{f}{3m\omega_0^2}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t.$$

При подстановке $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ в уравнение (29,1) мы не получим членов, имеющих характер резонансной внешней силы, как это было в предыдущем случае. Возникает, однако, резонанс параметрического типа от члена третьего порядка, пропорционального произведению $x^{(1)}x^{(2)}$. Если из всех нелинейных членов сохранить лишь этот, то для $x^{(2)}$ получим уравнение

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)}$$

или

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2\left[1 - \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t\right]x^{(2)} = 0, \quad (29,10)$$

т. е. уравнение типа (27,8) (с учетом трения), приводящее, как мы уже знаем, к неустойчивости колебаний в определенном интервале частот.

Однако для определения результирующей амплитуды колебаний это уравнение недостаточно. Установление конечной амплитуды связано с эффектами нелинейности, для учета которых в уравнении движения должны быть сохранены также нелинейные по $x^{(2)}$ члены:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^2}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t\cdot x^{(2)}. \tag{29,11}$$

Исследование этой задачи можно очень упростить, заметив следующее обстоятельство. Положив в правой стороне уравнения (29,11)

$$x^{(2)} = b\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \delta\right]$$

(где b — искомая амплитуда резонансных колебаний, δ — несущественный для дальнейшего постоянный сдвиг фазы) и представив произведение двух периодических множителей в виде суммы двух косинусов, мы получим здесь член

$$\frac{\alpha f b}{3m\omega_0^2}\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t - \delta\right]$$

обычного резонансного (по отношению к собственной частоте системы ω_0) характера. Поэтому задача снова сводится к рассмотренной в начале параграфа задаче об обычном резонансе в нелинейной системе с тем лишь отличием, что роль амплитуды внешней силы играет теперь величина $\alpha f b/3\omega_0^2$ (а вместо ε стоит $\varepsilon/2$). Произведя эту замену в уравнении (29,4), получим:

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{2} - \varkappa b^2\right)^2 + \lambda^2\right] = \frac{\alpha^2 f^2 b^2}{36m^2\omega_0^6}.$$

Решая это уравнение относительно b, найдем следующие возможные значения амплитуды:

$$b = 0, \tag{29,12}$$

$$b^2 = \frac{1}{\varkappa}\left[\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2 - \lambda^2}\right], \tag{29,13}$$

$$b^2 = \frac{1}{\varkappa}\left[\frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2 - \lambda^2}\right]. \tag{29,14}$$

На рис. 33 изображена получающаяся отсюда зависимость b от ε (для $\varkappa > 0$; при $\varkappa < 0$ кривые направлены в обратную сторону). Точки B и C отвечают значениям

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha f}{3m\omega_0^3}\right)^2 - 4\lambda^2}.$$

Слева от точки B возможно лишь значение $b=0$, т. е. резонанс отсутствует и колебания с частотой $\approx\omega_0$ не возбуждаются. В интервале между B и C имеем два корня: $b=0$ (отрезок BC на рис. 33) и выражение (29,13) (ветвь BE). Наконец, справа от точки C существуют все три корня (29,12)—(29,14). Однако не все эти значения отвечают устойчивому колебательному режиму. Значение $b=0$ неустойчиво на участке BC[1]), и можно показать также, что всегда неустойчив режим, соответствующий корню (29,14) (промежуточному между двумя другими). На рис. 33 неустойчивые значения b изображены штриховой линией.

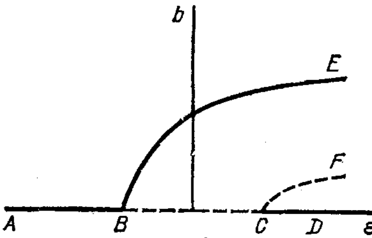

Рис. 33

Проследим, например, за поведением первоначально «покоившейся»[2]) системы при постепенном уменьшении частоты внешней силы. До достижения точки C остается $b=0$, а затем происходит «срыв» этого состояния с переходом на ветвь EB. При дальнейшем уменьшении ε амплитуда колебаний уменьшается до нуля в точке B. При обратном же увеличении частоты амплитуда колебаний растет вдоль кривой BE[3]).

Рассмотренные случаи резонансов являются основными из возникающих в нелинейной колебательной системе. В более высоких приближениях появляются резонансы и на других частотах. Строго говоря, резонанс должен возникать на всякой частоте γ, для которой $n\gamma + m\omega_0 = \omega_0$ (n, m — целые числа), т. е. при всяком $\gamma = p\omega_0/q$, где p, q — снова целые числа. Однако

---

[1]) Этот интервал как раз соответствует области параметрического резонанса (27,12), причем из сравнения (29,10) с (27,8) имеем $|h| = 2\alpha f/3m\omega_0^4$. Условие же

$$\left|2\alpha f/3m\omega_0^3\right| > 4\lambda,$$

при котором возможно существование рассматриваемого явления, отвечает неравенству $h > h_k$.

[2]) Напомним, что мы рассматриваем здесь резонансные колебания. Их отсутствие не означает поэтому буквального покоя системы, в которой будут происходить слабые вынужденные колебания с частотой γ.

[3]) Следует, однако, помнить, что все выведенные формулы справедливы лишь до тех пор, пока амплитуда b (а также ε) остается достаточно малой. В действительности кривые BE и CF в своем дальнейшем ходе оканчиваются, соединяясь в некоторой точке; при достижении этой точки колебательный режим «срывается» и становится $b=0$.

с увеличением степени приближения интенсивность резонансных явлений (а также ширины областей частот, в которых они должны иметь место) столь быстро убывает, что реально могут наблюдаться лишь резонансы на частотах $\gamma \approx p\omega_0/q$ с небольшими значениями p и q.

Задача

Определить зависимость $b(\varepsilon)$ от резонанса на частотах $\gamma \approx 3\omega_0$.

Решение. В первом приближении

$$x^{(1)} = -\frac{f}{8m\omega_0^2}\cos(3\omega_0 + \varepsilon)t.$$

Для второго приближения ($x^{(2)}$) получаем из (29,1) уравнение

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -3\beta x^{(1)} x^{(2)2},$$

где в правой стороне равенства написан лишь член, приводящий к рассматриваемому резонансу. Положив в нем $x^{(2)} = b\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t + \delta\right]$ и выделяя из произведения трех косинусов резонансный член, получим в правой стороне уравнения выражение

$$\frac{3\beta b^2 f}{32m\omega_0^2}\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t - 2\delta\right].$$

Отсюда видно, что зависимость b от ε получится заменой в уравнении (29,4) f на $3\beta b^2 f/32\omega_0^2$ и ε на $\varepsilon/3$:

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{3} - \varkappa b^2\right)^2 + \lambda^2\right] = \frac{9\beta^2 f^2}{2^{12} m^2 \omega_0^6}\, b^4 \equiv Ab^4.$$

Корни этого уравнения:

$$b = 0, \qquad b^2 = \frac{\varepsilon}{3\varkappa} + \frac{A}{2\varkappa^2} \pm \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\varepsilon A}{3\varkappa} + \frac{A^2}{4\varkappa^2} - \lambda^2}.$$

На рис. 34 изображен графически характер зависимости b от ε (при $\varkappa > 0$). Устойчивым режимам отвечают лишь значение $b = 0$ (ось абсцисс) и ветвь AB. Точке A соответствуют значения

$$\varepsilon_k = \frac{3(4\varkappa^2\lambda^2 - A^2)}{4\varkappa A},$$

$$b_k^2 = \frac{4\varkappa^2\lambda^2 + A^2}{4\varkappa^2 A}.$$

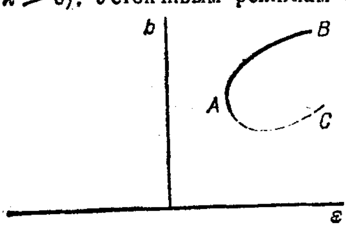

Рис. 34

Колебательный режим существует лишь при $\varepsilon > \varepsilon_k$, причем амплитуда $b > b_k$. Поскольку состояние $b = 0$ всегда устойчиво, то для возбуждения колебаний необходим начальный «толчок».

Полученные формулы справедливы лишь при малых ε. Малость ε обеспечивается малостью λ, если при этом амплитуда силы удовлетворяет условию $\lambda^2/\omega_0 \ll A/\varkappa \ll \omega_0$.