§ 30. Движение в быстро осциллирующем поле

Рассмотрим движение частицы, находящейся одновременно под действием постоянного поля U и силы

$$f = f_1 \cos\omega t + f_2 \sin\omega t, \tag{30,1}$$

меняющейся со временем с большой частотой ω (f_2, f_2 — функции только от координат). Под «большой» мы понимаем при этом частоту, удовлетворяющую условию $\omega \gg 1/T$, где T — порядок величины периода движения, которое частица совершала бы в одном поле U. По своей величине сила f не предполагается слабой по сравнению с силами, действующими в поле U. Мы будем, однако, предполагать малым вызываемое этой силой колебательное смещение частицы (обозначенное ниже посредством ξ).

Для упрощения вычислений рассмотрим сначала одномерное движение в поле, зависящем лишь от одной пространственной координаты x. Тогда уравнение движения частицы[1])

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f. \tag{30,2}$$

Из характера действующего на частицу поля заранее ясно, что ее движение будет представлять собой перемещение вдоль некоторой плавной траектории с одновременными малыми осцилляциями (с частотой ω) вокруг нее. Соответственно этому представим функцию $x(t)$ в виде суммы

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \tag{30,3}$$

где $\xi(t)$ представляет собой указанные малые осцилляции.

Среднее значение функции $\xi(t)$ за время ее периода $2\pi/\omega$ обращается в нуль, функция же $X(t)$ за это время меняется очень мало. Обозначая такое усреднение чертой над буквой, имеем поэтому: $\bar{x} = X(t)$, т. е. функция $X(t)$ описывает усредненное по быстрым осцилляциям «плавное» движение частицы. Выведем уравнение, определяющее эту функцию[2]).

Подставляя (30,3) в (30,2) и разлагая по степеням ξ с точностью до членов первого порядка, получим:

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dX} - \xi\frac{d^2U}{dX^2} + f(X, t) + \xi\frac{\partial f}{\partial X}. \tag{30,4}$$

В этом уравнении фигурируют члены различного характера — осциллирующие и «плавные»; они должны, очевидно, взаимно

[1]) Координата x — не обязательно декартова, а коэффициент m соответственно не обязательно есть масса частицы и не обязательно постоянен, как это предположено в (30,2). Такое предположение, однако, не отражается на окончательном результате (см. ниже).

[2]) Идея излагаемого ниже метода принадлежит *П. Л. Капице* (1951).

сокращаться в каждой из этих двух групп в отдельности. Для осциллирующих членов достаточно написать:

$$m\ddot{\xi} = f(X, t), \tag{30,5}$$

остальные содержат малый множитель ξ и потому малы по сравнению с написанными (что касается производной $\ddot{\xi}$, то она пропорциональна большой величине ω^2 и потому не мала). Интегрируя уравнение (30,5) с функцией f из (30,1) (причем величина X рассматривается как постоянная), получим:

$$\xi = -f/m\omega^2. \tag{30,6}$$

Усредним теперь уравнение (30,4) по времени (в указанном выше смысле). Поскольку средние значения первых степеней f и ξ обращаются в нуль, получим уравнение

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} + \overline{\xi\frac{\partial f}{\partial X}} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2}\overline{f\frac{\partial f}{\partial X}},$$

содержащее уже только функцию $X(t)$. Перепишем его окончательно в виде

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{эфф}}{dX}, \tag{30,7}$$

где «эффективная потенциальная энергия» определяется посредством [1])

$$U_{эфф} = U + \frac{1}{2m\omega^2}\overline{f^2} = U + \frac{1}{4m\omega^2}(f_1^2 + f_2^2). \tag{30,8}$$

Сравнивая это выражение с (30,6), легко видеть, что дополнительный (по отношению к полю U) член представляет собой не что иное, как среднюю кинетическую энергию осцилляционного движения:

$$U_{эфф} = U + \frac{m}{2}\overline{\dot{\xi}^2}. \tag{30,9}$$

Таким образом, усредненное по осцилляциям движение частицы происходит так, как если бы, помимо постоянного поля U, действовало еще и дополнительное постоянное поле, квадратично зависящее от амплитуды переменного поля.

Полученный результат может быть легко обобщен на случай системы с любым числом степеней свободы, описываемой обобщенными координатами q_i. Для эффективной потенциаль-

---

[1]) Произведя несколько более длинные вычисления при зависящей от x величине m, легко убедиться в том, что формулы (30,7), (30,8) остаются справедливыми и в этом случае.

ной энергии получается (вместо (30,8)) выражение

$$U_{\text{эфф}} = U + \frac{1}{2\omega^2}\sum_{i,\,k} a_{ik}^{-1}\overline{f_i f_k} = U + \sum_{i,\,k}\frac{a_{ik}}{2}\overline{\dot{\xi}_i\dot{\xi}_k}, \qquad (30,10)$$

где величины a_{ik}^{-1} (вообще говоря, — функции координат) — элементы матрицы, обратной матрице коэффициентов a_{ik} в кинетической энергии системы (см. (5,5)).

Задачи

1. Определить положения устойчивого равновесия маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные колебания с большой частотой γ ($\gamma \gg \sqrt{g/l}$).

Решение. Из полученной в задаче 3, в) § 5 функции Лагранжа видно, что в данном случае переменная сила

$$f = -mla\gamma^2 \cos\gamma t \sin\varphi$$

(в качестве величины x выбран угол φ). Поэтому «эффективная потенциальная энергия»

$$U_{\text{эфф}} = mgl\left(-\cos\varphi + \frac{a^2\gamma^2}{4gl}\sin^2\varphi\right).$$

Положения устойчивого равновесия отвечают минимуму этой функции. Направление вертикально вниз ($\varphi = 0$) всегда устойчиво. При выполнении условия

$$a^2\gamma^2 > 2gl$$

устойчивым является также положение вертикально вверх ($\varphi = \pi$).

2. То же для маятника с горизонтально колеблющейся точкой подвеса.

Решение. По полученной в задаче 3, б) § 5 функции Лагранжа находим $f = mla\gamma^2 \cos\gamma t \cos\varphi$ и затем

$$U_{\text{эфф}} = mgl\left[-\cos\varphi + \frac{a^2\gamma^2}{4gl}\cos^2\varphi\right].$$

Если $a^2\gamma^2 < 2gl$, то устойчиво положение $\varphi = 0$. Если же $a^2\gamma^2 > 2gl$, то устойчивому равновесию отвечает значение

$$\cos\varphi = 2gl/a^2\gamma^2.$$