ГЛАВА VI

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 31. Угловая скорость

Твердое тело можно определить в механике как систему материальных точек, расстояния между которыми неизменны. Реально существующие в природе системы могут, конечно, удовлетворять этому условию лишь приближенно. Но большинство твердых тел в обычных условиях так мало изменяет свою форму и размеры, что при изучении законов движения твердого тела, рассматриваемого как нечто целое, мы вполне можем отвлечься от этих изменений.

В дальнейшем изложении мы будем часто рассматривать твердое тело как дискретную совокупность материальных точек, чем достигается некоторое упрощение выводов. Это, однако, ни в какой степени не противоречит тому обстоятельству, что в действительности твердые тела можно обычно рассматривать в механике как сплошные, совершенно не интересуясь их внутренней структурой. Переход от формул, содержащих суммирование по дискретным точкам, к формулам для сплошного тела осуществляется просто заменой масс частиц на массу $\rho\, dV$, заключенную в элементе объема dV (ρ — плотность массы), и интегрированием по всему объему тела.

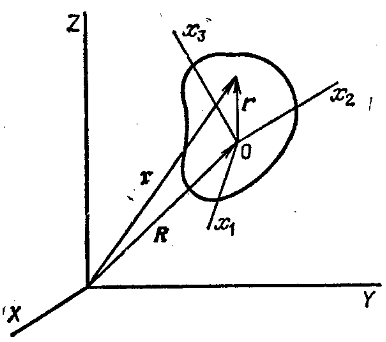

Рис. 35

Для описания движения твердого тела введем две системы координат: «неподвижную», т. е. инерциальную систему XYZ, и движущуюся систему координат $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, которая предполагается жестко связанной с твердым телом и участвующей во всех его движениях. Начало движущейся системы координат удобно совместить с центром инерции тела.

Положение твердого тела относительно неподвижной системы координат вполне определяется заданием положения движущейся системы. Пусть радиус-вектор $\mathbf{R}$ указывает положение начала O движущейся системы (рис. 35). Ориентация же осей этой системы относительно неподвижной определяется тремя независимыми углами, так что вместе с тремя компонентами вектора **R** мы имеем всего шесть координат. Таким образом, всякое твердое тело представляет собой механическую систему с шестью степенями свободы.

Рассмотрим произвольное бесконечно малое перемещение твердого тела. Его можно представить в виде суммы двух частей. Одна из них есть бесконечно малый параллельный перенос тела, в результате которого центр инерции переходит из начального положения в конечное при неизменной ориентации осей подвижной системы координат. Вторая — бесконечно малый поворот вокруг центра инерции, в результате которого твердое тело приходит в конечное положение.

Обозначим радиус-вектор произвольной точки твердого тела в подвижной системе координат посредством **r**, а радиус-вектор той же точки в неподвижной системе — посредством $\mathbf{\mathfrak{r}}$. Тогда бесконечно малое смещение $d\mathbf{\mathfrak{r}}$ точки P складывается из перемещения $d\mathbf{R}$ вместе с центром инерции и перемещения $[d\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{r}]$ относительно последнего при повороте на бесконечно малый угол $d\boldsymbol{\varphi}$ (см. (9,1)):

$$d\mathbf{\mathfrak{r}} = d\mathbf{R} + [d\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{r}].$$

Разделив это равенство на время dt, в течение которого произошло рассматриваемое перемещение, и введя скорости

$$\frac{d\mathbf{\mathfrak{r}}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}, \tag{31,1}$$

получим соотношение между ними

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]. \tag{31,2}$$

Вектор **V** есть скорость центра инерции твердого тела; ее называют также скоростью его *поступательного* движения. Вектор $\boldsymbol{\Omega}$ называется *угловой скоростью* вращения твердого тела; его направление (как и направление $d\boldsymbol{\varphi}$) совпадает с направлением оси вращения. Таким образом, скорость **v** любой точки тела (относительно неподвижной системы координат) может быть выражена через поступательную скорость тела и угловую скорость его вращения.

Следует подчеркнуть, что при выводе формулы (31,2) специфические свойства начала координат как центра инерции тела совершенно не были использованы. Преимущества этого выбора выяснятся лишь позже при вычислении энергии движущегося тела.

Допустим теперь, что жестко связанная с твердым телом система координат выбрана так, что ее начало находится не в центре инерции O, а в некоторой точке O' на расстоянии **a** от точки O. Скорость перемещения начала O' этой системы обозначим через $\mathbf{V}'$, а угловую скорость ее вращения — через $\boldsymbol{\Omega}'$.

Рассмотрим снова какую-либо точку P твердого тела и обозначим ее радиус-вектор относительно начала O' через $\mathbf{r}'$. Тогда $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ и подстановка в (31,2) дает:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{a}] + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}'].$$

С другой стороны, по определению $\mathbf{V}'$ и $\boldsymbol{\Omega}'$, должно быть $\mathbf{v} = \mathbf{V}' + [\boldsymbol{\Omega}'\mathbf{r}']$. Поэтому мы заключаем, что

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{a}], \quad \boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega}. \tag{31,3}$$

Второе из этих равенств весьма существенно. Мы видим, что угловая скорость, с которой вращается в каждый данный момент времени жестко связанная с телом система координат, оказывается совершенно не зависящей от этой системы. Все такие системы вращаются в заданный момент времени вокруг параллельных друг другу осей с одинаковой по абсолютной величине скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. Это обстоятельство и дает нам право называть $\boldsymbol{\Omega}$ угловой скоростью вращения твердого тела как такового. Скорость же поступательного движения такого «абсолютного» характера отнюдь не имеет.

Из первой формулы (31,3) видно, что если $\mathbf{V}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ (в данный момент времени) взаимно перпендикулярны при каком-либо выборе начала координат O, то они (т. е. $\mathbf{V}'$ и $\boldsymbol{\Omega}'$) взаимно перпендикулярны и при определении по отношению к любому другому началу O'. Из формулы (31,2) видно, что в этом случае скорости $\mathbf{v}$ всех точек тела лежат в одной и той же плоскости — плоскости, перпендикулярной к $\boldsymbol{\Omega}$. При этом всегда можно выбрать такое начало O'[1]), скорость $\mathbf{V}'$ которого равна нулю, что движение твердого тела (в данный момент) будет представлено как чистое вращение вокруг оси, проходящей через O'. Эту ось называют *мгновенной осью вращения* тела[2]).

В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что начало движущейся системы координат выбрано в центре инерции тела, так что и ось вращения тела проходит через этот центр. При движении тела меняются, вообще говоря, как абсолютная величина $\boldsymbol{\Omega}$, так и направление оси вращения.

§ 32. Тензор инерции

Для вычисления кинетической энергии твердого тела рассматриваем его как дискретную систему материальных точек

---

[1]) Оно может, конечно, оказаться лежащим и вне объема тела.

[2]) В общем же случае не взаимно перпендикулярных направлений $\mathbf{V}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ начало координат можно выбрать таким образом, чтобы $\mathbf{V}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ стали параллельными, т. е. движение (в данный момент времени) будет совокупностью вращения вокруг некоторой оси и поступательного перемещения вдоль этой же оси.