Рассмотрим снова какую-либо точку P твердого тела и обозначим ее радиус-вектор относительно начала O' через $\mathbf{r}'$. Тогда $\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{a}$ и подстановка в (31,2) дает:

$$\mathbf{v}=\mathbf{V}+[\mathbf{\Omega a}]+[\mathbf{\Omega r}'].$$

С другой стороны, по определению $\mathbf{V}'$ и $\mathbf{\Omega}'$, должно быть $\mathbf{v}=\mathbf{V}'+[\mathbf{\Omega}'\mathbf{r}']$. Поэтому мы заключаем, что

$$\mathbf{V}'=\mathbf{V}+[\mathbf{\Omega a}],\quad \mathbf{\Omega}'=\mathbf{\Omega}. \tag{31,3}$$

Второе из этих равенств весьма существенно. Мы видим, что угловая скорость, с которой вращается в каждый данный момент времени жестко связанная с телом система координат, оказывается совершенно не зависящей от этой системы. Все такие системы вращаются в заданный момент времени вокруг параллельных друг другу осей с одинаковой по абсолютной величине скоростью $\mathbf{\Omega}$. Это обстоятельство и дает нам право называть $\mathbf{\Omega}$ угловой скоростью вращения твердого тела как такового. Скорость же поступательного движения такого «абсолютного» характера отнюдь не имеет.

Из первой формулы (31,3) видно, что если $\mathbf{V}$ и $\mathbf{\Omega}$ (в данный момент времени) взаимно перпендикулярны при каком-либо выборе начала координат O, то они (т. е. $\mathbf{V}'$ и $\mathbf{\Omega}'$) взаимно перпендикулярны и при определении по отношению к любому другому началу O'. Из формулы (31,2) видно, что в этом случае скорости $\mathbf{v}$ всех точек тела лежат в одной и той же плоскости — плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{\Omega}$. При этом всегда можно выбрать такое начало O'[1]), скорость $\mathbf{V}'$ которого равна нулю, что движение твердого тела (в данный момент) будет представлено как чистое вращение вокруг оси, проходящей через O'. Эту ось называют *мгновенной осью вращения* тела[2]).

В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что начало движущейся системы координат выбрано в центре инерции тела, так что и ось вращения тела проходит через этот центр. При движении тела меняются, вообще говоря, как абсолютная величина $\mathbf{\Omega}$, так и направление оси вращения.

§ 32. Тензор инерции

Для вычисления кинетической энергии твердого тела рассматриваем его как дискретную систему материальных точек

---

[1]) Оно может, конечно, оказаться лежащим и вне объема тела.

[2]) В общем же случае не взаимно перпендикулярных направлений $\mathbf{V}$ и $\mathbf{\Omega}$ начало координат можно выбрать таким образом, чтобы $\mathbf{V}$ и $\mathbf{\Omega}$ стали параллельными, т. е. движение (в данный момент времени) будет совокупностью вращения вокруг некоторой оси и поступательного перемещения вдоль этой же оси.

и пишем:

$$T=\sum \frac{mv^2}{2},$$

где суммирование производится по всем точкам, составляющим тело. Здесь и ниже мы опускаем индексы, нумерующие эти точки, с целью упрощения записи формул.

Подставив сюда (31,2), получим:

$$T=\sum \frac{m}{2}(\mathbf{V}+[\mathbf{\Omega r}])^2=\sum \frac{m}{2}V^2+\sum m\mathbf{V}\,[\mathbf{\Omega r}]+\sum \frac{m}{2}[\mathbf{\Omega r}]^2.$$

Скорости $\mathbf{V}$ и $\mathbf{\Omega}$ одинаковы для всех точек твердого тела. Поэтому в первом члене $V^2/2$ выносится за знак суммы, а сумма $\sum m$ есть масса тела, которую мы будем обозначать посредством μ. Во втором члене пишем:

$$\sum m\mathbf{V}\,[\mathbf{\Omega r}]=\sum m\mathbf{r}\,[\mathbf{V\Omega}]=[\mathbf{V\Omega}]\sum m\mathbf{r}.$$

Отсюда видно, что если начало движущейся системы координат выбрано, как условлено, в центре инерции, то этот член обращается в нуль, так как тогда $\sum m\mathbf{r}=0$. Наконец, в третьем члене раскрываем квадрат векторного произведения и в результате находим:

$$T=\frac{\mu V^2}{2}+\frac{1}{2}\sum m\,\{\Omega^2r^2-(\mathbf{\Omega r})^2\}. \qquad (32,1)$$

Таким образом, кинетическая энергия твердого тела может быть представлена в виде суммы двух частей. Первый член в (32,1) есть кинетическая энергия поступательного движения — она имеет такой вид, как если бы вся масса тела была сосредоточена в его центре инерции. Второй член есть кинетическая энергия вращательного движения с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ вокруг оси, проходящей через центр инерции. Подчеркнем, что возможность такого разделения кинетической энергии на две части обусловлена выбором начала связанной с телом системы координат именно в его центре инерции.

Перепишем кинетическую энергию вращения в тензорных обозначениях, т. е. через компоненты x_i, Ω_i векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{\Omega}$ [1]).

[1]) В этой главе буквами i, k, l обозначаются тензорные индексы, пробегающие значения 1, 2, 3. При этом везде применяется известное правило суммирования, согласно которому знаки сумм опускаются, а по всем дважды повторяющимся (так называемым «немым») индексам подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3; так, $A_iB_i=\mathbf{AB}$, $A_i^2=A_iA_i=\mathbf{A}^2$ и т. д. Обозначение немых индексов можно, очевидно, менять произвольным образом (лишь бы оно не совпало с обозначением других фигурирующих в данном выражении тензорных индексов).

Имеем:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2}\sum m\left\{\Omega_i^2 x_l^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k\right\} = \frac{1}{2}\sum m\left\{\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}x_l^2 - \Omega_i\Omega_k x_i x_k\right\} = \\ = \frac{1}{2}\Omega_i\Omega_k\sum m\left(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right).$$

Здесь использовано тождество $\Omega_i = \delta_{ik}\Omega_k$, где δ_{ik} — единичный тензор (компоненты которого равны единице при $i = k$ и нулю при $i \neq k$). Введя тензор

$$I_{ik} = \sum m\left(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right), \tag{32,2}$$

получим окончательное выражение для кинетической энергии твердого тела в виде

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik}\Omega_i\Omega_k. \tag{32,3}$$

Функция Лагранжа твердого тела получается из (32,3) вычитанием потенциальной энергии

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik}\Omega_i\Omega_k - U. \tag{32,4}$$

Потенциальная энергия является в общем случае функцией шести переменных, определяющих положение твердого тела, например, трех координат X, Y, Z центра инерции и трех углов, определяющих ориентацию движущихся осей координат относительно неподвижных.

Тензор I_{ik} называется *тензором моментов инерции* или просто *тензором инерции* тела. Как ясно из определения (32,2), он симметричен, т. е.

$$I_{ik} = I_{ki}. \tag{32,5}$$

Выпишем для наглядности его компоненты в явном виде в следующей таблице:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}. \tag{32,6}$$

Компоненты I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} иногда называют моментами инерции относительно соответствующих осей.

Тензор инерции, очевидно, аддитивен — моменты инерции тела равны суммам моментов инерции его частей.

Если твердое тело можно рассматривать как сплошное, то в определении (32,2) сумма заменяется интегралом по объему тела:

$$I_{ik} = \int \rho\left(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) dV. \tag{32,7}$$

Как и всякий симметричный тензор второго ранга, тензор инерции может быть приведен к диагональному виду путем соответствующего выбора направлений осей x_1, x_2, x_3. Эти направления называют *главными осями инерции*, а соответствующие значения компонент тензора — *главными моментами инерции*; обозначим их как I_1, I_2, I_3. При таком выборе осей x_1, x_2, x_3 вращательная кинетическая энергия выражается особенно просто:

$$T_{\text{вр}} = {}^1/_2 \left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right). \tag{32,8}$$

Отметим, что каждый из трех главных моментов инерции не может быть больше суммы двух других. Так,

$$I_1 + I_2 = \sum m\left(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2\right) \geqslant \sum m\left(x_1^2 + x_2^2\right) = I_3. \tag{32,9}$$

Тело, у которого все три главных момента инерции различны, называют *асимметрическим волчком*.

Если два главных момента инерции равны друг другу, $I_1 = I_2 \neq I_3$, то твердое тело называют *симметрическим волчком*. В этом случае выбор направления главных осей в плоскости x_1x_2 произволен.

Если же все три главных момента инерции совпадают, то тело называют *шаровым волчком*. В этом случае произволен выбор всех трех главных осей инерции: в качестве их можно взять любые три взаимно перпендикулярные оси.

Нахождение главных осей инерции очень упрощается, если твердое тело обладает той или иной симметрией; ясно, что положение центра инерции и направления главных осей инерции должны обладать той же симметрией.

Так, если тело обладает плоскостью симметрии, то центр инерции должен лежать в этой плоскости. В ней же лежат две главные оси инерции, и третья — перпендикулярна к ней. Очевидным случаем такого рода является система частиц, расположенных в одной плоскости. В этом случае существует простое соотношение между тремя главными моментами инерции. Если плоскость системы выбрана в качестве плоскости x_1x_2, то поскольку для всех частиц $x_3 = 0$, имеем:

$$I_1 = \sum m x_2^2, \quad I_2 = \sum m x_1^2, \quad I_3 = \sum m\left(x_1^2 + x_2^2\right),$$

так что

$$I_3 = I_1 + I_2. \tag{32,10}$$

Если тело обладает осью симметрии какого-либо порядка, то центр инерции лежит на этой оси. С ней же совпадает одна из главных осей инерции, а две другие — перпендикулярны к ней. При этом, если порядок оси симметрии выше второго, то тело является симметрическим волчком. Действительно, каждую главную ось (перпендикулярную к оси симметрии) можно повернуть тогда на угол, отличный от 180°, т. е. выбор этих осей становится неоднозначным, а это возможно лишь в случае симметрического волчка.

Особым случаем является система частиц, расположенных вдоль одной прямой линии. Если выбрать эту прямую в качестве оси x_3, то для всех частиц $x_1 = x_2 = 0$, и потому два главных момента инерции совпадают, а третий равен нулю:

$$I_1 = I_2 = \sum m x_3^2, \quad I_3 = 0. \tag{32,11}$$

Такую систему называют *ротатором*. Характерной особенностью ротатора в отличие от общего случая произвольного тела является то, что он имеет всего две (а не три) вращательные степени свободы, соответствующие вращениям вокруг осей x_1 и x_2; говорить же о вращении прямой вокруг самой себя, очевидно, не имеет смысла.

Наконец, сделаем еще одно замечание по поводу вычисления тензора инерции. Хотя мы определили этот тензор по отношению к системе координат с началом в центре инерции (только при таком определении справедлива основная формула (32,3)), но для его вычисления может иногда оказаться удобным вычислить предварительно аналогичный тензор

$$I'_{ik} = \sum m \left(x_l'^2 \delta_{ik} - x_i' x_k'\right),$$

определенный по отношению к другому началу O'. Если расстояние OO' дается вектором $\mathbf{a}$, то $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$, $x_i = x_i' + a_i$; учитывая также, что $\sum m\mathbf{r} = 0$, по определению точки O, найдем:

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu\left(a^2 \delta_{ik} - a_i a_k\right). \tag{32,12}$$

По этой формуле, зная I'_{ik}, легко вычислить искомый тензор I_{ik}.

Задачи

1. Определить главные моменты инерции для молекул, рассматриваемых как системы частиц, находящихся на неизменных расстояниях друг от друга, в следующих случаях:

а) Молекулы из атомов, расположенных на одной прямой.

Ответ:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{\mu} \sum_{a \neq b} m_a m_b l_{ab}^2, \qquad I_3 = 0,$$

где m_a — массы атомов, l_{ab} — расстояние между атомами a и b; суммирование производится по всем парам атомов в молекуле (причем каждая пара значений a, b входит в сумму по одному разу).

Для двухатомной молекулы сумма сводится к одному члену, давая заранее очевидный результат — произведение приведенной массы обоих атомов на квадрат расстояния между ними:

$$I_1 = I_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

б) Трехатомная молекула в виде равнобедренного треугольника (рис. 36).

Ответ: Центр инерции лежит на высоте треугольника на расстоянии $X_2 = m_2h/\mu$ от его основания. Моменты инерции:

$$I_1 = \frac{2m_1m_2}{\mu}h^2, \qquad I_2 = \frac{m_1}{2}a^2, \qquad I_3 = I_1 + I_2.$$

в) Четырехатомная молекула с атомами, расположенными в вершинах правильной трехугольной пирамиды (рис. 37).

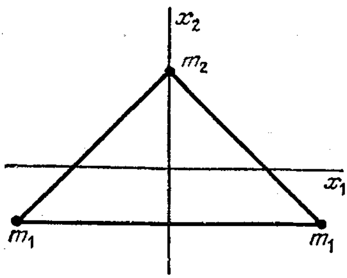

Рис. 36

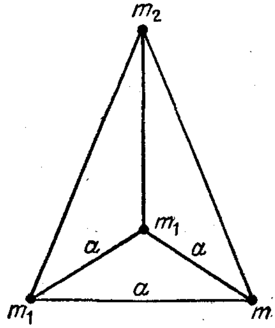

Рис. 37

Ответ: Центр инерции лежит на высоте пирамиды на расстоянии $X_3 = m_2h/\mu$ от ее основания. Моменты инерции:

$$I_1 = I_2 = \frac{3m_1m_2}{\mu}h^2 + \frac{m_1a^2}{2}, \qquad I_3 = m_1a^2.$$

При $m_1 = m_2$, $h = a\sqrt{2/3}$ мы получаем тетраэдрическую молекулу с моментами инерции

$$I_1 = I_2 = I_3 = m_1a^2.$$

2. Определить главные моменты инерции сплошных однородных тел.

а) Тонкий стержень длиной l.

Ответ: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}\mu l^2$, $I_3 = 0$ (толщиной стержня пренебрегаем).

б) Шар радиуса R.

Ответ:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}\mu R^2$$

$\left(\text{вычислять следует сумму } I_1 + I_2 + I_3 = 2\rho\int r^2\,dV\right)$.

в) Круговой цилиндр радиуса R и высотой h.

Ответ:

$$I_1 = I_2 = \frac{\mu}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right), \qquad I_3 = \frac{\mu}{2}R^2$$

(x_3 — ось цилиндра).

г) Прямоугольный параллелепипед с длинами ребер a, b, c.

Ответ:

$$I_1 = \frac{\mu}{12}(b^2 + c^2), \qquad I_2 = \frac{\mu}{12}(c^2 + a^2), \qquad I_3 = \frac{\mu}{12}(a^2 + b^2)$$

(оси x_1, x_2, x_3 параллельны ребрам a, b, c), д) Круговой конус с высотой h и радиусом основания R.

Решение. Вычисляем сначала тензор I'_{ik} по отношению к осям с началом в вершине конуса (рис. 38). Вычисление легко производится в цилиндрических координатах и дает:

$$I'_1 = I'_2 = \frac{3}{5}\mu\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right), \qquad I'_3 = \frac{3}{10}\mu R^2.$$

Центр тяжести находится, как показывает простое вычисление, на оси конуса на расстоянии $a = 3h/4$ от вершины. По формуле (32,12) находим окончательно

$$I_1 = I_2 = I'_1 - \mu a^2 = \frac{3}{20}\mu\left(R^2 + \frac{h^2}{4}\right), \qquad I_3 = I'_3 = \frac{3}{10}\mu R^2.$$

е) Трехосный эллипсоид с полуосями a, b, c.

Решение. Центр инерции совпадает с центром эллипсоида, а главные оси инерции — с его осями. Интегрирование по объему эллипсоида может быть сведено к интегрированию по объему сферы путем преобразования координат $x = a\xi$, $y = b\eta$, $z = c\zeta$, превращающего уравнение поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

в уравнение поверхности единичной сферы

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Так, для момента инерции относительно оси x получаем:

$$I_1 = \rho \iiint (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \rho abc \iiint (b^2\eta^2 + c^2\zeta^2)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = abc\,\frac{1}{2} I' \,(b^2 + c^2),$$

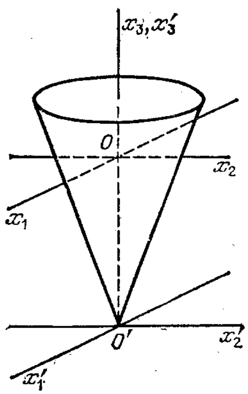

Рис. 38

где I' — момент инерции шара единичного радиуса.

Учитывая, что объем эллипсоида равен $4\pi abc/3$, получим окончательно моменты инерции

$$I_1 = \frac{\mu}{5}(b^2 + c^2), \qquad I_2 = \frac{\mu}{5}(a^2 + c^2), \qquad I_3 = \frac{\mu}{5}(a^2 + b^2).$$

3. Определить частоту малых колебаний физического маятника (твердое тело, качающееся в поле тяжести около неподвижной горизонтальной оси).

Решение. Пусть l — расстояние от центра инерции маятника до оси вращения, а α, β, γ — углы между направлениями его главных осей инерции и осью вращения. В качестве переменной координаты вводим угол φ между вертикалью и перпендикуляром, опущенным из центра инерции на ось вращения. Скорость центра инерции $V = l\dot{\varphi}$, а проекции угловой скорости на главные оси инерции: $\dot{\varphi}\cos\alpha$, $\dot{\varphi}\cos\beta$, $\dot{\varphi}\cos\gamma$. Считая угол φ малым, находим потенциальную энергию в виде

$$U = \mu g l\,(1 - \cos\varphi) \approx \frac{1}{2}\mu g l \varphi^2.$$

Поэтому функция Лагранжа

$$L=\frac{\mu l^2}{2}\dot\varphi^2+\frac{1}{2}(I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma)\dot\varphi^2-\frac{\mu g l^2}{2}\varphi^2.$$

Отсюда для частоты колебаний имеем:

$$\omega^2=\frac{\mu g l}{\mu l^2+I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma}.$$

4. Найти кинетическую энергию системы, изображенной на рис. 39; OA и AB — тонкие однородные стержни длиной l, шарниро скрепленные в точке A. Стержень OA вращается (в плоскости рисунка) вокруг точки O, а конец B стержня AB скользит вдоль оси Ox.

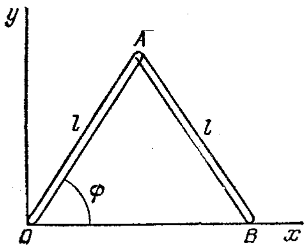

Рис. 39

Решение. Скорость центра инерции стержня OA (находящегося на его середине) есть $l\dot\varphi/2$, где φ — угол AOB. Поэтому кинетическая энергия стержня OA

$$T_1=\frac{\mu l^2}{8}\dot\varphi^2+\frac{I}{2}\dot\varphi^2$$

(μ — масса одного стержня).

Декартовы координаты центра инерции стержня AB: $X=\frac{3l}{2}\cos\varphi$, $Y=\frac{l}{2}\sin\varphi$. Так как угловая скорость вращения этого стержня тоже равна $\dot\varphi$, то его кинетическая энергия

$$T_2=\frac{\mu}{2}(\dot X^2+\dot Y^2)+\frac{I}{2}\dot\varphi^2=\frac{\mu l^2}{8}(1+8\sin^2\varphi)\dot\varphi^2+\frac{I\dot\varphi^2}{2}.$$

Полная кинетическая энергия системы

$$T=\frac{\mu l^2}{3}(1+3\sin^2\varphi)\dot\varphi^2$$

(подставлено $I=\mu l^2/12$ согласно задаче 2, а)).

5. Найти кинетическую энергию цилиндра (радиуса R), катящегося по плоскости. Масса цилиндра распределена по его объему таким образом, что одна из главных осей инерции параллельна оси цилиндра и проходит на расстоянии a от нее; момент инерции относительно этой главной оси есть I.

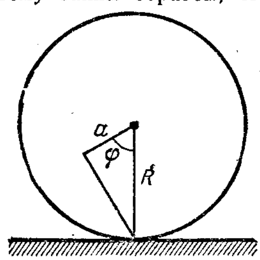

Рис. 40

Решение. Вводим угол φ между вертикалью и перпендикуляром, опущенным из центра тяжести на ось цилиндра (рис. 40). Движение цилиндра в каждый момент времени можно рассматривать как чистое вращение вокруг мгновенной оси, совпадающей с линией его соприкосновения с неподвижной плоскостью; угловая скорость этого вращения есть $\dot\varphi$ (угловая скорость вращения вокруг всех параллельных осей одинакова). Центр инерции находится на расстоянии $\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$ от мгновенной оси и потому его скорость есть $V=\dot\varphi\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$. Полная кинетическая энергия

$$T=\frac{\mu}{2}(a^2+R^2-2aR\cos\varphi)\dot\varphi^2+\frac{I}{2}\dot\varphi^2.$$

6. Найти кинетическую энергию однородного цилиндра радиуса a, катящегося по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиуса R (рис. 41).

Решение. Вводим угол φ между линией, соединяющей центры обоих цилиндров, и вертикалью. Центр инерции катящегося цилиндра находится на оси и его скорость $V = \dot{\varphi}(R - a)$. Угловую скорость вычисляем, как скорость

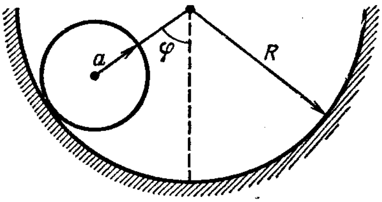

Рис. 41

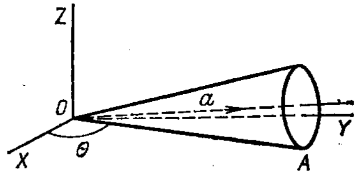

Рис. 42

чистого вращения вокруг мгновенной оси, совпадающей с линией соприкосновения цилиндров; она равна

$$\Omega = \frac{V}{a} = \dot{\varphi}\frac{R - a}{a}.$$

Если I_3 — момент инерции относительно оси цилиндра, то

$$T = \frac{\mu}{2}(R-a)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{I_3}{2}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}\mu(R-a)^2\dot{\varphi}^2$$

(I_3 — из задачи 2, в)).

7. Найти кинетическую энергию однородного конуса, катящегося по плоскости.

Решение. Обозначим посредством θ угол между линией OA соприкосновения конуса с плоскостью и каким-либо неподвижным направлением в этой плоскости (рис. 42). Центр инерции находится на оси конуса и его скорость $V = a\cos\alpha\cdot\dot{\theta}$, где 2α — угол раствора конуса, а a — расстояние центра инерции от вершины. Угловую скорость вращения вычисляем, как скорость чистого вращения вокруг мгновенной оси OA:

$$\Omega = \frac{V}{a\sin\alpha} = \dot{\theta}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Одна из главных осей инерции (ось x_3) совпадает с осью конуса, а другую (ось x_2) выбираем перпендикулярно к оси конуса и линии OA. Тогда проекции вектора Ω (направленного параллельно OA) на главные оси инерции будут $\Omega\sin\alpha$, 0, $\Omega\cos\alpha$. В результате находим для искомой кинетической энергии:

$$T = \frac{\mu a^2}{2}\cos^2\alpha\cdot\dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2}\cos^2\alpha\cdot\dot{\theta}^2 + \frac{I_3}{2}\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}\dot{\theta}^2 = \frac{3\mu h^2}{40}\dot{\theta}^2(1 + 5\cos^2\alpha)$$

(h — высота конуса, I_1, I_2, a — из задачи 2, д)).

8. Найти кинетическую энергию однородного конуса, основание которого катится по плоскости, а вершина постоянно находится в точке над плоскостью на высоте, равной радиусу основания (так что ось конуса параллельна плоскости).

Решение. Вводим угол θ между заданным направлением в плоскости и проекцией на нее оси конуса (рис. 43). Тогда скорость центра инерции

$V = a\dot{\theta}$ (обозначения те же, что в задаче 7). Мгновенной осью вращения является образующая конуса OA, проведенная в точку его соприкосновения с плоскостью. Центр инерции находится на расстоянии $a\sin\alpha$ от этой оси и потому

$$\Omega = \frac{V}{a\sin\alpha} = \frac{\dot{\theta}}{\sin\alpha}.$$

Проекции вектора Ω на главные оси инерции (ось x_2 выбираем перпендику-

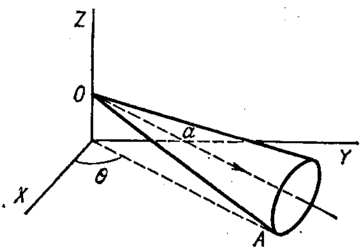

Рис. 43

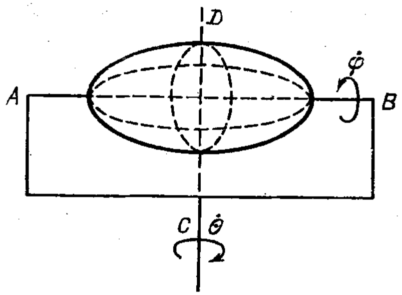

Рис. 44

лярной к оси конуса и линии OA): $\Omega\sin\alpha = \dot{\theta}$, 0, $\Omega\cos\alpha = \dot{\theta}\operatorname{ctg}\alpha$. Поэтому кинетическая энергия

$$T = \frac{\mu a^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_3}{2}\dot{\theta}^2\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{3\mu h^2}{40}\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + 5\right).$$

9. Найти кинетическую энергию однородного трехосного эллипсоида, вращающегося вокруг одной из своих осей (AB, рис. 44), причем последняя сама вращается вокруг направления CD, перпендикулярного к ней и проходящего через центр эллипсоида.

Решение. Угол поворота вокруг оси CD обозначим посредством θ, а угол поворота вокруг оси AB (угол между CD и осью инерции x_1, перпендикулярной к AB) — через φ. Тогда проекции Ω на оси инерции будут:

$$\dot{\theta}\cos\varphi, \quad \dot{\theta}\sin\varphi, \quad \dot{\varphi}$$

(причем ось x_3 совпадает с AB). Поскольку центр инерции, совпадающий с центром эллипсоида, неподвижен, то кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}(I_1\cos^2\varphi + I_2\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\varphi}^2.$$

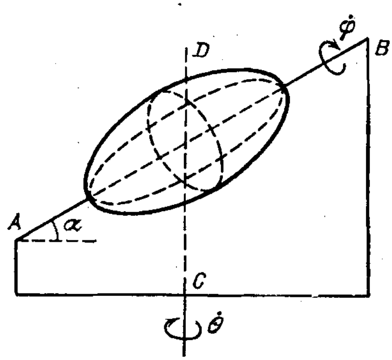

Рис. 45

10. То же, если ось AB наклонена, а эллипсоид симметричен относительно этой оси (рис. 45).

Решение. Проекции Ω на ось AB и на перпендикулярные к ней две другие главные оси инерции (которые можно выбрать произвольно):

$$\dot{\theta}\cos\alpha\cos\varphi, \quad \dot{\theta}\cos\alpha\sin\varphi, \quad \dot{\varphi} + \dot{\theta}\sin\alpha.$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{I_1}{2}\cos^2\alpha\cdot\dot\theta^2 + \frac{I_3}{2}(\dot\varphi + \dot\theta\sin\alpha)^2.$$

§ 33. Момент импульса твердого тела

Величина момента импульса системы зависит, как мы знаем, от выбора точки, относительно которой он определен. В механике твердого тела наиболее рационален выбор в качестве этой точки начала подвижной системы координат, т. е. центра инерции тела. Ниже мы будем понимать под $\mathbf{M}$ момент, определенный именно таким образом.

Согласно формуле (9,6) при выборе начала координат в центре инерции тела его момент $\mathbf{M}$ совпадает с «собственным моментом», связанным лишь с движением точек тела относительно центра инерции. Другими словами, в определении $\mathbf{M} = \sum m[\mathbf{rv}]$ надо заменить $\mathbf{v}$ на $[\mathbf{\Omega r}]$:

$$\mathbf{M} = \sum m[\mathbf{r}[\mathbf{\Omega r}]] = \sum m\{r^2\mathbf{\Omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r\Omega})\},$$

или в тензорных обозначениях:

$$M_i = \sum m\{x_l^2\Omega_i - x_i x_k\Omega_k\} = \Omega_k \sum m\{x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\}.$$

Наконец, учитывая определение (32,2) тензора инерции, получаем окончательно:

$$M_i = I_{ik}\Omega_k. \tag{33,1}$$

Если оси x_1, x_2, x_3 направлены вдоль главных осей инерции тела, то эта формула дает:

$$M_1 = I_1\Omega_1, \quad M_2 = I_2\Omega_2, \quad M_3 = I_3\Omega_3. \tag{33,2}$$

В частности, для шарового волчка, когда все три главных момента инерции совпадают, имеем просто:

$$\mathbf{M} = I\mathbf{\Omega}, \tag{33,3}$$

т. е. вектор момента пропорционален вектору угловой скорости и имеет одинаковое с ним направление.

В общем же случае произвольного тела вектор $\mathbf{M}$, вообще говоря, не совпадает по своему направлению с вектором $\mathbf{\Omega}$, и лишь при вращении тела вокруг какой-либо из его главных осей инерции $\mathbf{M}$ и $\mathbf{\Omega}$ имеют одинаковое направление.

Рассмотрим свободное движение твердого тела, не подверженного действию каких-либо внешних сил. Не представляющее интереса равномерное поступательное движение будем предполагать исключенным, так что речь идет о свободном вращении тела.