Кинетическая энергия

$$T = \frac{I_1}{2}\cos^2\alpha\cdot\dot\theta^2 + \frac{I_3}{2}(\dot\varphi + \dot\theta\sin\alpha)^2.$$

§ 33. Момент импульса твердого тела

Величина момента импульса системы зависит, как мы знаем, от выбора точки, относительно которой он определен. В механике твердого тела наиболее рационален выбор в качестве этой точки начала подвижной системы координат, т. е. центра инерции тела. Ниже мы будем понимать под $\mathbf{M}$ момент, определенный именно таким образом.

Согласно формуле (9,6) при выборе начала координат в центре инерции тела его момент $\mathbf{M}$ совпадает с «собственным моментом», связанным лишь с движением точек тела относительно центра инерции. Другими словами, в определении $\mathbf{M} = \sum m[\mathbf{rv}]$ надо заменить $\mathbf{v}$ на $[\mathbf{\Omega r}]$:

$$\mathbf{M} = \sum m[\mathbf{r}[\mathbf{\Omega r}]] = \sum m\{r^2\mathbf{\Omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r\Omega})\},$$

или в тензорных обозначениях:

$$M_i = \sum m\{x_l^2\Omega_i - x_i x_k\Omega_k\} = \Omega_k\sum m\{x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\}.$$

Наконец, учитывая определение (32,2) тензора инерции, получаем окончательно:

$$M_i = I_{ik}\Omega_k. \tag{33,1}$$

Если оси x_1, x_2, x_3 направлены вдоль главных осей инерции тела, то эта формула дает:

$$M_1 = I_1\Omega_1, \quad M_2 = I_2\Omega_2, \quad M_3 = I_3\Omega_3. \tag{33,2}$$

В частности, для шарового волчка, когда все три главных момента инерции совпадают, имеем просто:

$$\mathbf{M} = I\mathbf{\Omega}, \tag{33,3}$$

т. е. вектор момента пропорционален вектору угловой скорости и имеет одинаковое с ним направление.

В общем же случае произвольного тела вектор $\mathbf{M}$, вообще говоря, не совпадает по своему направлению с вектором $\mathbf{\Omega}$, и лишь при вращении тела вокруг какой-либо из его главных осей инерции $\mathbf{M}$ и $\mathbf{\Omega}$ имеют одинаковое направление.

Рассмотрим свободное движение твердого тела, не подверженного действию каких-либо внешних сил. Не представляющее интереса равномерное поступательное движение будем предполагать исключенным, так что речь идет о свободном вращении тела.

Как и у всякой замкнутой системы, момент импульса свободно вращающегося тела постоянен. Для шарового волчка условие $\mathbf{M} = \mathrm{const}$ приводит просто к $\mathbf{\Omega} = \mathrm{const}$. Это значит, что общим случаем свободного вращения шарового волчка является просто равномерное вращение вокруг постоянной оси.

Столь же прост случай ротатора. Здесь тоже $\mathbf{M} = I\mathbf{\Omega}$, причем вектор $\mathbf{\Omega}$ перпендикулярен к оси ротатора. Поэтому свободное вращение ротатора есть равномерное вращение в одной плоскости вокруг направления, перпендикулярного к этой плоскости.

Закон сохранения момента достаточен и для определения более сложного свободного вращения симметрического волчка.

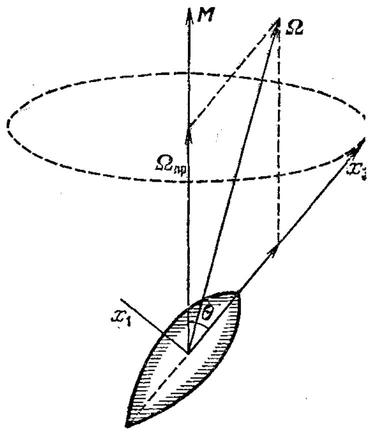

Рис. 46

Воспользовавшись произвольностью выбора направлений главных осей инерции x_1, x_2 (перпендикулярных к оси симметрии волчка x_3), выберем ось x_2 перпендикулярной к плоскости, определяемой постоянным вектором $\mathbf{M}$ и мгновенным положением оси x_3. Тогда $M_2 = 0$, а из формул (33,2) видно, что и $\Omega_2 = 0$. Это значит, что направления $\mathbf{M}$, $\mathbf{\Omega}$ и оси волчка в каждый момент времени лежат в одной плоскости (рис. 46). Но отсюда в свою очередь следует, что скорости $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega r}]$ всех точек на оси волчка в каждый момент времени перпендикулярны к указанной плоскости; другими словами, ось волчка равномерно (см. ниже) вращается вокруг направления $\mathbf{M}$, описывая круговой конус (так называемая *регулярная прецессия* волчка). Одновременно с прецессией сам волчок равномерно вращается вокруг собственной оси.

Угловые скорости обоих этих вращений легко выразить через заданную величину момента M и угол наклона θ оси волчка к направлению $\mathbf{M}$. Угловая скорость вращения волчка вокруг своей оси есть просто проекция Ω_3 вектора $\mathbf{\Omega}$ на эту ось:

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3}\cos\theta. \qquad (33,4)$$

Для определения же скорости прецессии $\Omega_{пр}$ надо разложить вектор $\mathbf{\Omega}$ по правилу параллелограмма на составляющие вдоль x_3 и вдоль $\mathbf{M}$. Из них первая не приводит ни к какому перемещению самой оси волчка, а потому вторая и дает искомую угловую скорость прецессии. Из построения на рис. 46 ясно, что $\Omega_{\text{пр}} \sin\theta = \Omega_1$, а поскольку $\Omega_1 = M_1/I_1 = M\sin\theta/I_1$, то получаем:

$$\Omega_{\text{пр}} = M/I_1. \tag{33,5}$$

§ 34. Уравнения движения твердого тела

Поскольку твердое тело обладает в общем случае шестью степенями свободы, то общая система уравнений движения должна содержать шесть независимых уравнений. Их можно представить в виде, определяющем производные по времени от двух векторов: импульса и момента тела.

Первое из этих уравнений получается просто путем суммирования уравнений $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}$ для каждой из составляющих тело частиц, где $\mathbf{p}$ — импульс частицы, а $\mathbf{f}$ — действующая на нее сила. Вводя полный импульс тела

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = \mu\mathbf{V}$$

и полную действующую на него силу $\sum \mathbf{f} = \mathbf{F}$, получим:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{34,1}$$

Хотя мы определили $\mathbf{F}$ как сумму всех сил $\mathbf{f}$, действующих на каждую из частиц, в том числе со стороны других частиц тела, фактически в $\mathbf{F}$ входят лишь силы, действующие со стороны внешних источников. Все силы взаимодействия между частицами самого тела взаимно сокращаются; действительно, при отсутствии внешних сил импульс тела, как и всякой замкнутой системы, должен сохраняться, т. е. должно быть $\mathbf{F} = 0$.

Если U — потенциальная энергия твердого тела во внешнем поле, то сила $\mathbf{F}$ может быть определена путем дифференцирования ее по координатам центра инерции тела:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}. \tag{34,2}$$

Действительно, при поступательном перемещении тела на $\delta\mathbf{R}$ настолько же меняются и радиус-векторы $\mathbf{r}$ каждой точки тела, а потому изменение потенциальной энергии

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{R} \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\delta\mathbf{R} \sum \mathbf{f} = -\mathbf{F}\delta\mathbf{R}.$$

Отметим в этой связи, что уравнение (34,1) может быть получено и как уравнение Лагранжа по отношению к координатам центра инерции

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}}$$