что $\Omega_{пр} \sin\theta = \Omega_1$, а поскольку $\Omega_1 = M_1/I_1 = M\sin\theta/I_1$, то получаем:

$$\Omega_{пр} = M/I_1. \tag{33,5}$$

§ 34. Уравнения движения твердого тела

Поскольку твердое тело обладает в общем случае шестью степенями свободы, то общая система уравнений движения должна содержать шесть независимых уравнений. Их можно представить в виде, определяющем производные по времени от двух векторов: импульса и момента тела.

Первое из этих уравнений получается просто путем суммирования уравнений $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}$ для каждой из составляющих тело частиц, где $\mathbf{p}$ — импульс частицы, а $\mathbf{f}$ — действующая на нее сила. Вводя полный импульс тела

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = \mu\mathbf{V}$$

и полную действующую на него силу $\sum \mathbf{f} = \mathbf{F}$, получим:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{34,1}$$

Хотя мы определили $\mathbf{F}$ как сумму всех сил $\mathbf{f}$, действующих на каждую из частиц, в том числе со стороны других частиц тела, фактически в $\mathbf{F}$ входят лишь силы, действующие со стороны внешних источников. Все силы взаимодействия между частицами самого тела взаимно сокращаются; действительно, при отсутствии внешних сил импульс тела, как и всякой замкнутой системы, должен сохраняться, т. е. должно быть $\mathbf{F} = 0$.

Если U — потенциальная энергия твердого тела во внешнем поле, то сила $\mathbf{F}$ может быть определена путем дифференцирования ее по координатам центра инерции тела:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}. \tag{34,2}$$

Действительно, при поступательном перемещении тела на $\delta\mathbf{R}$ настолько же меняются и радиус-векторы $\mathbf{r}$ каждой точки тела, а потому изменение потенциальной энергии

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{R}\sum\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\delta\mathbf{R}\sum\mathbf{f} = -\mathbf{F}\delta\mathbf{R}.$$

Отметим в этой связи, что уравнение (34,1) может быть получено и как уравнение Лагранжа по отношению к координатам центра инерции

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}}$$

с функцией Лагранжа (32,4), для которой

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = \mu \mathbf{V} = \mathbf{P}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{F}.$$

Перейдем к выводу второго уравнения движения, определяющего производную по времени от момента импульса $\mathbf{M}$. Для упрощения вывода удобно выбрать «неподвижную» (инерциальную) систему отсчета таким образом, чтобы в данный момент времени центр инерции тела покоился относительно нее.

Имеем:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{d}{dt} \sum [\mathbf{rp}] = \sum [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] + \sum [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}].$$

В силу сделанного нами выбора системы отсчета (в которой $\mathbf{V} = 0$) значение $\dot{\mathbf{r}}$ в данный момент времени совпадает со скоростью $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$. Поскольку же векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ имеют одинаковое направление, то $[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] = 0$. Заменив также $\dot{\mathbf{p}}$ на силу $\mathbf{f}$, получим окончательно:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}, \tag{34,3}$$

где

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{rf}]. \tag{34,4}$$

Поскольку момент $\mathbf{M}$ определен относительно центра инерции (см. начало § 33), он не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Это видно из формулы (9,5) с $\mathbf{R} = 0$. Отсюда следует, что уравнение движения (34,3), полученное здесь при определенном выборе системы отсчета, тем самым, в силу галилеевского принципа относительности, справедливо в любой инерциальной системе.

Вектор $[\mathbf{rf}]$ называется *моментом силы* $\mathbf{f}$, так что $\mathbf{K}$ есть сумма моментов всех сил, действующих на тело. Как и в полной силе $\mathbf{F}$, в сумме (34,4) фактически должны учитываться лишь внешние силы; в соответствии с законом сохранения момента импульса сумма моментов всех сил, действующих внутри замкнутой системы, должна обращаться в нуль.

Момент силы, как и момент импульса, зависит, вообще говоря, от выбора начала координат, относительно которого он определен. В (34,3), (34,4) моменты определяются относительно центра инерции тела.

При переносе начала координат на расстояние $\mathbf{a}$ новые радиус-векторы $\mathbf{r}'$ точек тела связаны со старыми $\mathbf{r}$ посредством $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$. Поэтому

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{rf}] = \sum [\mathbf{r}'\mathbf{f}] + \sum [\mathbf{af}]$$

или

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}' + [\mathbf{aF}]. \tag{34,5}$$

Отсюда видно, в частности, что величина момента сил не зависит от выбора начала координат, если полная сила $\mathbf{F}=0$ (в таком случае говорят, что к телу приложена *пара сил*).

Уравнение (34,3) можно рассматривать как уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \Omega}=\frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

по отношению к «вращательным координатам». Действительно, дифференцируя функцию Лагранжа (32,4) по компонентам вектора Ω, получим:

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_i}=I_{ik}\Omega_k=M_i.$$

Изменение же потенциальной энергии U при повороте тела на бесконечно малый угол $\delta\varphi$ равно:

$$\delta U=-\sum \mathbf{f}\delta\mathbf{r}=-\sum \mathbf{f}\,[\delta\varphi\cdot\mathbf{r}]=-\delta\varphi\sum[\mathbf{r}\mathbf{f}]=-\mathbf{K}\delta\varphi,$$

откуда

$$\mathbf{K}=-\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \tag{34,6}$$

так что

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=-\frac{\partial U}{\partial \varphi}=\mathbf{K}.$$

Предположим, что векторы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{K}$ взаимно перпендикулярны. В этом случае всегда можно найти такой вектор $\mathbf{a}$, чтобы в формуле (34,5) $\mathbf{K}'$ обратилось в нуль, так что будет:

$$\mathbf{K}=[\mathbf{aF}]. \tag{34,7}$$

При этом выбор $\mathbf{a}$ неоднозначен: прибавление к нему любого вектора, параллельного $\mathbf{F}$, не изменит равенства (34,7), так что условие $\mathbf{K}'=0$ даст не определенную точку в подвижной системе координат, а лишь определенную прямую линию. Таким образом, при $\mathbf{K}\perp\mathbf{F}$ действие всех приложенных к нему сил может быть сведено к одной силе $\mathbf{F}$, действующей вдоль определенной прямой линии.

Таков, в частности, случай однородного силового поля, в котором действующая на материальную точку сила имеет вид $\mathbf{f}=e\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — постоянный вектор, характеризующий поле, а величина e характеризует свойства частицы по отношению к данному полю[1]). В этом случае имеем:

$$\mathbf{F}=\mathbf{E}\sum e,\quad \mathbf{K}=[\sum e\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}].$$

[1]) Так, в однородном электрическом поле $\mathbf{E}$ есть напряженность поля, а e — заряд частицы. В однородном поле тяжести $\mathbf{E}$ есть ускорение силы тяжести $\mathbf{g}$, а e — масса частицы m.

Предполагая, что $\sum e \neq 0$, введем радиус-вектор $\mathbf{r}_0$, определенный согласно

$$\mathbf{r}_0 = \sum e\mathbf{r} / \sum e. \tag{34,8}$$

Тогда мы получим следующее простое выражение для полного момента сил:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{r}_0\mathbf{F}]. \tag{34,9}$$

Таким образом, при движении твердого тела в однородном поле влияние поля сводится к действию одной силы $\mathbf{F}$, «приложенной» в точке с радиус-вектором (34,8). Положение этой точки всецело определяется свойствами самого тела; в поле тяжести, например, она совпадает с центром инерции тела.

§ 35. Эйлеровы углы

Как уже указывалось, для описания движения твердого тела можно пользоваться тремя координатами его центра инерции и какими-либо тремя углами, определяющими ориентацию осей x_1, x_2, x_3 движущейся системы координат относительно неподвижной системы X, Y, Z. В качестве этих углов часто оказываются удобными так называемые *эйлеровы углы.*

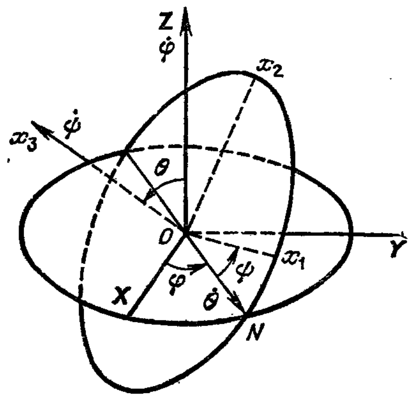

Рис. 47

Так как нас сейчас интересуют только углы между осями координат, мы выберем начала обеих систем в одной точке (рис. 47). Подвижная плоскость x_1x_2 пересекает неподвижную XY по некоторой прямой (ON на рис. 47), которую называют *линией узлов.* Эта линия, очевидно, перпендикулярна как к оси Z, так и к оси x_3; ее положительное направление выберем так, чтобы оно соответствовало направлению векторного произведения $[\mathbf{z}\mathbf{x}_3]$ (где $\mathbf{z}$, $\mathbf{x}_3$ — орты в направлении осей Z и x_3).

В качестве величин, определяющих положение осей x_1, x_2, x_3 относительно осей X, Y, Z, примем следующие углы: угол θ между осями Z и x_3, угол φ между осями X и N, угол ψ между осями N и x_1. Углы φ и ψ отсчитываются в направлениях, определяемых правилом винта, соответственно вокруг осей Z и x_3.