Предполагая, что $\sum e \neq 0$, введем радиус-вектор $\mathbf{r}_0$, определенный согласно

$$\mathbf{r}_0 = \sum e\mathbf{r} / \sum e. \tag{34,8}$$

Тогда мы получим следующее простое выражение для полного момента сил:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{r}_0 \mathbf{F}]. \tag{34,9}$$

Таким образом, при движении твердого тела в однородном поле влияние поля сводится к действию одной силы $\mathbf{F}$, «приложенной» в точке с радиус-вектором (34,8). Положение этой точки всецело определяется свойствами самого тела; в поле тяжести, например, она совпадает с центром инерции тела.

§ 35. Эйлеровы углы

Как уже указывалось, для описания движения твердого тела можно пользоваться тремя координатами его центра инерции и какими-либо тремя углами, определяющими ориентацию осей x_1, x_2, x_3 движущейся системы координат относительно неподвижной системы X, Y, Z. В качестве этих углов часто оказываются удобными так называемые *эйлеровы углы.*

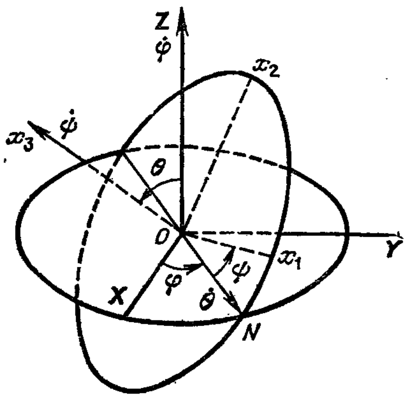

Рис. 47

Так как нас сейчас интересуют только углы между осями координат, мы выберем начала обеих систем в одной точке (рис. 47). Подвижная плоскость x_1x_2 пересекает неподвижную XY по некоторой прямой (ON на рис. 47), которую называют *линией узлов.* Эта линия, очевидно, перпендикулярна как к оси Z, так и к оси x_3; ее положительное направление выберем так, чтобы оно соответствовало направлению векторного произведения $[\mathbf{z}\mathbf{x}_3]$ (где $\mathbf{z}$, $\mathbf{x}_3$ — орты в направлении осей Z и x_3).

В качестве величин, определяющих положение осей x_1, x_2, x_3 относительно осей X, Y, Z, примем следующие углы: угол θ между осями Z и x_3, угол φ между осями X и N, угол ψ между осями N и x_1. Углы φ и ψ отсчитываются в направлениях, определяемых правилом винта, соответственно вокруг осей Z и x_3.

Угол θ пробегает значения от нуля до π, а углы φ и ψ — от нуля до 2π [1]).

Выразим теперь компоненты вектора угловой скорости Ω по подвижным осям x_1, x_2, x_3 через эйлеровы углы и их производные. Для этого надо спроектировать на эти оси угловые скорости $\dot\theta$, $\dot\varphi$, $\dot\psi$. Угловая скорость $\dot\theta$ направлена по линии узлов ON и ее составляющие по осям x_1, x_2, x_3 равны:

$$\dot\theta_1 = \dot\theta \cos\psi, \qquad \dot\theta_2 = -\dot\theta \sin\psi, \qquad \dot\theta_3 = 0.$$

Угловая скорость $\dot\varphi$ направлена вдоль оси Z; ее проекция на ось x_3 равна $\dot\varphi_3 = \dot\varphi\cos\theta$, а проекция на плоскость x_1x_2 равна $\dot\varphi\sin\theta$. Разлагая последнюю на составляющие по осям x_1 и x_2, получим:

$$\dot\varphi_1 = \dot\varphi \sin\theta \sin\psi, \qquad \dot\varphi_2 = \dot\varphi \sin\theta \cos\psi.$$

Наконец, угловая скорость $\dot\psi$ направлена по оси x_3.

Собирая все эти составляющие по каждой из осей, получим окончательно:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi,\\ \Omega_2 &= \dot\varphi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi,\\ \Omega_3 &= \dot\varphi \cos\theta + \dot\psi.\end{aligned} \tag{35,1}$$

Если оси x_1, x_2, x_3 выбраны по главным осям инерции твердого тела, то вращательную кинетическую энергию, выраженную через эйлеровы углы, мы получим подстановкой (35,1) в (32,8).

Для симметрического волчка, у которого $I_1 = I_2 \neq I_3$, найдем после простого приведения:

$$T_{\text{вр}} = \frac{I_1}{2}(\dot\varphi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{I_3}{2}(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2. \tag{35,2}$$

Заметим, что это выражение можно получить и проще, воспользовавшись произвольностью выбора направлений главных осей инерции x_1, x_2 у симметрического волчка. Считая, что ось x_1 совпадает с осью узлов ON, т. е. что $\psi = 0$, будем иметь для составляющих угловой скорости более простые выражения

$$\Omega_1 = \dot\theta, \qquad \Omega_2 = \dot\varphi \sin\theta, \qquad \Omega_3 = \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi. \tag{35,3}$$

В качестве простого примера применения эйлеровых углов определим с их помощью известное уже нам свободное движение симметрического волчка.

[1]) Углы θ и $\varphi - \pi/2$ представляют собой соответственно полярный угол и азимут направления x_3 по отношению к осям X, Y, Z. В то же время θ и $\pi/2 - \psi$ являются соответственно полярным углом и азимутом направления Z по отношению к осям x_1, x_2, x_3.

Выберем ось Z неподвижной системы координат в направлении постоянного момента волчка $\mathbf{M}$. Ось x_3 подвижной системы направлена по оси волчка, а ось x_1 пусть совпадает в данный момент времени с осью узлов. Тогда для компонент вектора $\mathbf{M}$ находим с помощью формул (35,3):

$$M_1 = I_1\Omega_1 = I_1\dot\theta,\ M_2 = I_2\Omega_2 = I_2\dot\varphi\sin\theta,\ M_3 = I_3\Omega_3 = I_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi).$$

С другой стороны, поскольку ось x_1 (линия узлов) перпендикулярна к оси Z, имеем:

$$M_1 = 0, \qquad M_2 = M\sin\theta, \qquad M_3 = M\cos\theta.$$

Приравнивая друг другу эти выражения, получим следующие уравнения:

$$\dot\theta = 0, \qquad I_1\dot\varphi = M, \qquad I_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi) = M\cos\theta. \qquad (35,4)$$

Первое из этих уравнений дает $\theta = \mathrm{const}$, т. е. постоянство угла наклона оси волчка к направлению $\mathbf{M}$. Второе определяет (в согласии с (33,5)) угловую скорость прецессии $\dot\varphi = M/I_1$. Наконец, третье определяет угловую скорость вращения волчка вокруг собственной оси $\Omega_3 = M\cos\theta/I_3$.

Задачи

1. Привести к квадратурам задачу о движении тяжелого симметрического волчка с неподвижной нижней точкой (рис. 48).

Решение. Совместное начало подвижной и неподвижной систем координат выбираем в неподвижной точке волчка O, а ось Z направляем по вертикали (рис. 48). Функция Лагранжа волчка в поле тяжести

$$L = \frac{I_1 + \mu l^2}{2}(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)^2 - \mu g l\cos\theta$$

(μ — масса волчка, l — расстояние от нижней точки до центра инерции).

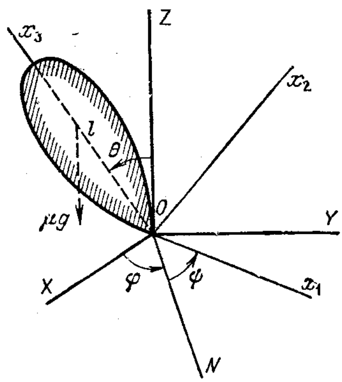

Рис. 48

Координаты ψ и φ — циклические. Поэтому имеем два интеграла движения:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta) = \mathrm{const} \equiv M_3, \qquad (1)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \left(I_1'\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right)\dot\varphi + I_3\dot\psi\cos\theta = \mathrm{const} \equiv M_z, \qquad (2)$$

где введено обозначение $I_1' = I_1 + \mu l^2$ (величины p_ψ и p_φ представляют собой составляющие вращательного момента, определенного относительно точки O, соответственно по осям x_3 и Z). Кроме того, сохраняется энергия

$$E = \frac{I_1'}{2}(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)^2 + \mu g l\cos\theta. \qquad (3)$$

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos\theta}{I_1' \sin^2\theta}, \tag{4}$$

$$\dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} - \cos\theta \frac{M_z - M_3 \cos\theta}{I_1' \sin^2\theta}. \tag{5}$$

Исключив с помощью этих равенств $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ из энергии (3), получим:

$$E' = \frac{I_1'}{2} \dot{\theta}^2 + U_{эфф}(\theta),$$

где введены обозначения

$$E' = E - \frac{M_3^2}{2I_3} - \mu g l, \quad U_{эфф}(\theta) = \frac{(M_z - M_3 \cos\theta)^2}{2I_1' \sin^2\theta} - \mu g l (1 - \cos\theta). \tag{6}$$

Определяя отсюда $\dot{\theta}$ и разделяя переменные, получим:

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1'}(E' - U_{эфф}(\theta))}} \tag{7}$$

(интеграл — эллиптический). После этого углы ψ и φ выражаются как функции от θ в виде квадратур с помощью уравнений (4), (5).

Область изменения угла θ при движении определяется условием $E' \geqslant U_{эфф}(\theta)$. Функция $U_{эфф}(\theta)$ (при $M_3 \neq M_z$) стремится к $+\infty$ при значениях $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, а в промежутке между ними проходит через минимум. Поэтому уравнение $E' = U_{эфф}(\theta)$ имеет два корня, определяющих предельные углы θ_1 и θ_2 наклона оси волчка к вертикали.

При изменении угла θ от θ_1 до θ_2 знак производной $\dot{\varphi}$ остается неизменным или меняется, смотря по тому, остается ли неизменным или меняется

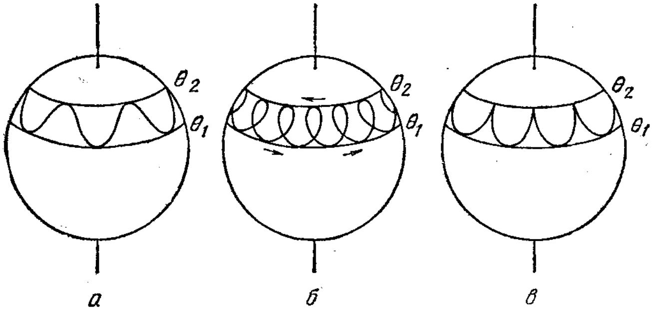

Рис. 49

в этом интервале знак разности $M_z - M_3 \cos\theta$. В первом случае ось волчка прецессирует вокруг вертикали монотонно, одновременно совершая колебания (так называемую *нутацию*) вверх и вниз (рис. 49, *а*; линия изображает след, который ось волчка чертила бы на поверхности сферы с центром в неподвижной точке волчка). Во втором случае направление прецессии противоположно на двух граничных окружностях, так что ось волчка перемещается вокруг вертикали, описывая петли (рис. 49, б). Наконец, если одно из значений θ_1, θ_2 совпадает с нулем, разности $M_z - M_3\cos\theta$ на соответствующей предельной окружности $\dot\phi$ и $\dot\theta$ одновременно обращаются в нуль, так что ось волчка описывает траекторию изображенного на рис. 49, в типа.

2. Найти условие, при котором вращение волчка вокруг вертикальной оси будет устойчивым.

Решение. При $\theta = 0$ оси x_3 и Z совпадают, так что $M_3 = M_z$, $E' = 0$. Вращение вокруг этой оси будет устойчивым, если значение $\theta = 0$ отвечает минимуму функции $U_{эфф}(\theta)$. При малых θ имеем:

$$U_{эфф} \approx \left(\frac{M_3^2}{8I_1'} - \frac{\mu g l}{2}\right)\theta^2,$$

откуда находим условие $M_3^2 > 4I_1'\mu g l$ или

$$\Omega_3^2 > 4I_1'\mu g l / I_3^2.$$

3. Определить движение волчка в случае, когда кинетическая энергия его собственного вращения велика по сравнению с энергией в поле тяжести (так называемый «быстрый» волчок).

Решение. В первом приближении, если пренебречь полем тяжести, происходит свободная прецессия оси волчка вокруг направления момента $\mathbf{M}$ (отвечающая в данном случае нутации волчка); она происходит согласно (33,5) с угловой скоростью

$$\Omega_{нут} = \frac{M}{I_1'}. \quad (1)$$

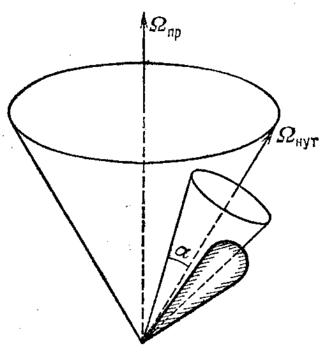

Рис. 50

В следующем приближении появляется медленная прецессия момента $\mathbf{M}$ вокруг направления вертикали (рис. 50). Для определения скорости этой прецессии усредним точное уравнение движения (34,3)

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}$$

по периоду нутации. Момент сил тяжести, действующих на волчок, равен $\mathbf{K} = \mu l[\mathbf{n}_3\mathbf{g}]$, где $\mathbf{n}_3$ — единичный вектор в направлении оси волчка. Из соображений симметрии очевидно, что результат усреднения $\mathbf{K}$ по «конусу нутации» сводится к замене вектора $\mathbf{n}_3$ его проекцией $\cos\alpha\cdot\mathbf{M}/M$ на направление $\mathbf{M}$ (α — угол между $\mathbf{M}$ и осью волчка). Таким образом, получим уравнение

$$\overline{\frac{d\mathbf{M}}{dt}} = -\cos\alpha\,\frac{\mu l}{M}\,[\mathbf{g}\mathbf{M}].$$

Оно означает, что вектор $\mathbf{M}$ прецессирует вокруг направления $\mathbf{g}$ (вертикали) со средней угловой скоростью

$$\overline{\mathbf{\Omega}}_{пр} = -\frac{\mu l\cos\alpha}{M}\mathbf{g} \quad (2)$$

(малой по сравнению с $\Omega_{нут}$).

В рассматриваемом приближении входящие в формулы (1) и (2) величины M и $\cos\alpha$ постоянны (хотя и не являются, строго говоря, интегралами движения). Они связаны, с той же точностью, со строго сохраняющимися величинами E и M_3 соотношениями

$$M_3 = M\cos\alpha, \quad E \approx \frac{M^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{I_3} + \frac{\sin^2\alpha}{I_1'}\right).$$

§ 36. Уравнения Эйлера

Написанные в § 34 уравнения движения относятся к неподвижной системе координат: производные $d\mathbf{P}/dt$ и $d\mathbf{M}/dt$ в уравнениях (34,1) и (34,3) представляют собой изменения векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ по отношению к этой системе. Между тем, наиболее простая связь между компонентами вращательного момента $\mathbf{M}$ твердого тела и компонентами угловой скорости имеет место в подвижной системе координат с осями, направленными по главным осям инерции. Для того чтобы воспользоваться этой связью, необходимо предварительно преобразовать уравнения движения к подвижным координатам x_1, x_2, x_3.

Пусть $d\mathbf{A}/dt$ — скорость изменения какого-либо вектора $\mathbf{A}$ по отношению к неподвижной системе координат. Если по отношению к вращающейся системе вектор $\mathbf{A}$ не изменяется, то его изменение относительно неподвижной системы обусловлено только вращением, и тогда

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}]$$

(см. § 9, где было указано, что такие формулы, как (9,1), (9,2), справедливы для любого вектора). В общем случае к правой части этого равенства надо добавить скорость изменения вектора $\mathbf{A}$ по отношению к подвижной системе; обозначив эту скорость, как $d'\mathbf{A}/dt$, получим:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}]. \tag{36,1}$$

С помощью этой общей формулы мы можем сразу переписать уравнения (34,1) и (34,3) в виде

$$\frac{d'\mathbf{P}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{P}] = \mathbf{F}, \quad \frac{d'\mathbf{M}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}] = \mathbf{K}. \tag{36,2}$$

Поскольку дифференцирование по времени производится здесь в подвижной системе координат, то мы можем непосредственно спроецировать уравнения на оси этой системы, написав

$$\left(\frac{d'\mathbf{P}}{dt}\right)_1 = \frac{dP_1}{dt}, \ \ldots, \ \left(\frac{d'\mathbf{M}}{dt}\right)_1 = \frac{dM_1}{dt}, \ \ldots,$$