В рассматриваемом приближении входящие в формулы (1) и (2) величины M и $\cos\alpha$ постоянны (хотя и не являются, строго говоря, интегралами движения). Они связаны, с той же точностью, со строго сохраняющимися величинами E и M_3 соотношениями

$$M_3 = M\cos\alpha, \quad E \approx \frac{M^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{I_3} + \frac{\sin^2\alpha}{I_1'}\right).$$

§ 36. Уравнения Эйлера

Написанные в § 34 уравнения движения относятся к неподвижной системе координат: производные $d\mathbf{P}/dt$ и $d\mathbf{M}/dt$ в уравнениях (34,1) и (34,3) представляют собой изменения векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ по отношению к этой системе. Между тем, наиболее простая связь между компонентами вращательного момента $\mathbf{M}$ твердого тела и компонентами угловой скорости имеет место в подвижной системе координат с осями, направленными по главным осям инерции. Для того чтобы воспользоваться этой связью, необходимо предварительно преобразовать уравнения движения к подвижным координатам x_1, x_2, x_3.

Пусть $d\mathbf{A}/dt$ — скорость изменения какого-либо вектора $\mathbf{A}$ по отношению к неподвижной системе координат. Если по отношению к вращающейся системе вектор $\mathbf{A}$ не изменяется, то его изменение относительно неподвижной системы обусловлено только вращением, и тогда

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}]$$

(см. § 9, где было указано, что такие формулы, как (9,1), (9,2), справедливы для любого вектора). В общем случае к правой части этого равенства надо добавить скорость изменения вектора $\mathbf{A}$ по отношению к подвижной системе; обозначив эту скорость, как $d'\mathbf{A}/dt$, получим:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}]. \tag{36,1}$$

С помощью этой общей формулы мы можем сразу переписать уравнения (34,1) и (34,3) в виде

$$\frac{d'\mathbf{P}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{P}] = \mathbf{F}, \quad \frac{d'\mathbf{M}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}] = \mathbf{K}. \tag{36,2}$$

Поскольку дифференцирование по времени производится здесь в подвижной системе координат, то мы можем непосредственно спроецировать уравнения на оси этой системы, написав

$$\left(\frac{d'\mathbf{P}}{dt}\right)_1 = \frac{dP_1}{dt}, \ \ldots, \ \left(\frac{d'\mathbf{M}}{dt}\right)_1 = \frac{dM_1}{dt}, \ \ldots,$$

где индексы 1, 2, 3 означают компоненты по осям x_1, x_2, x_3. При этом в первом уравнении заменяем $\mathbf{P}$ на $\mu\mathbf{V}$ и получаем:

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{dV_1}{dt}+\Omega_2V_3-\Omega_3V_2\right)&=F_1,\\ \mu\left(\frac{dV_2}{dt}+\Omega_3V_1-\Omega_1V_3\right)&=F_2,\\ \mu\left(\frac{dV_3}{dt}+\Omega_1V_2-\Omega_2V_1\right)&=F_3. \end{aligned} \tag{36,3}$$

Предполагая оси x_1, x_2, x_3 выбранными по главным осям инерции, пишем во втором из уравнений (36,2) $M_1=I_1\Omega_1$ и т. д. и получаем:

$$\begin{aligned} I_1\frac{d\Omega_1}{dt}+(I_3-I_2)\,\Omega_2\Omega_3&=K_1,\\ I_2\frac{d\Omega_2}{dt}+(I_1-I_3)\,\Omega_3\Omega_1&=K_2,\\ I_3\frac{d\Omega_3}{dt}+(I_2-I_1)\,\Omega_1\Omega_2&=K_3. \end{aligned} \tag{36,4}$$

Уравнения (36,4) называют *уравнениями Эйлера.*

При свободном вращении $\mathbf{K}=0$, так что уравнения Эйлера принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{dt}+\frac{I_3-I_2}{I_1}\,\Omega_2\Omega_3&=0,\\ \frac{d\Omega_2}{dt}+\frac{I_1-I_3}{I_2}\,\Omega_3\Omega_1&=0,\\ \frac{d\Omega_3}{dt}+\frac{I_2-I_1}{I_3}\,\Omega_1\Omega_2&=0. \end{aligned} \tag{36,5}$$

В качестве примера применим эти уравнения к уже рассматривавшемуся нами свободному вращению симметрического волчка. Положив $I_1=I_2$, имеем из третьего уравнения $\dot\Omega_3=0$, т. е. $\Omega_3=\mathrm{const}$. После этого первые два уравнения напишем в виде

$$\dot\Omega_1=-\omega\Omega_2,\qquad \dot\Omega_2=\omega\Omega_1,$$

где введена постоянная величина

$$\omega=\Omega_3\frac{I_3-I_1}{I_1}. \tag{36,6}$$

Умножив второе уравнение на i и сложив с первым, получим:

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1+i\Omega_2)=i\omega(\Omega_1+i\Omega_2),$$

откуда

$$\Omega_1+i\Omega_2=Ae^{i\omega t},$$

где A — постоянная; последнюю можно считать вещественной (это сводится к надлежащему выбору начала отсчета времени), и тогда

$$\Omega_1 = A\cos\omega t, \qquad \Omega_2 = A\sin\omega t. \tag{36,7}$$

Этот результат показывает, что проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную к оси волчка, вращается в этой плоскости с угловой скоростью ω, оставаясь постоянной по величине $\left(\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}=A\right)$. Поскольку проекция Ω_3 на ось волчка тоже постоянна, то мы заключаем, что и весь вектор $\mathbf{\Omega}$ равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси волчка, оставаясь неизменным по величине. Ввиду связи $M_1 = I_1\Omega_1$, $M_2 = I_2\Omega_2$, $M_3 = I_3\Omega_3$ между компонентами векторов $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{M}$ такое же движение (по отношению к оси волчка) совершает, очевидно, и вектор момента $\mathbf{M}$.

Полученная картина представляет собой, разумеется, лишь другой аспект того же движения волчка, которое уже было рассмотрено в §§ 33 и 35 по отношению к неподвижной системе координат. В частности, угловая скорость вращения вектора $\mathbf{M}$ (ось Z на рис. 48) вокруг направления x_3 совпадает, в терминах эйлеровых углов, с угловой скоростью $-\dot\psi$. С помощью уравнений (35,4) имеем:

$$\dot\psi = \frac{M\cos\theta}{I_3} - \dot\varphi\cos\theta = M\cos\theta\left(\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_1}\right)$$

или

$$-\dot\psi = \Omega_3\frac{I_3-I_1}{I_1},$$

в согласии с (36,6).

§ 37. Асимметрический волчок

Применим уравнения Эйлера к более сложной задаче о свободном вращении асимметрического волчка, у которого все три момента инерции различны. Для определенности будем считать, что

$$I_3 > I_2 > I_1. \tag{37,1}$$

Два интеграла уравнений Эйлера известны заранее. Они даются законами сохранения энергии и момента и выражаются равенствами

$$\begin{gathered} I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 = 2E, \\ I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 = M^2, \end{gathered} \tag{37,2}$$

где энергия E и абсолютная величина момента M — заданные постоянные. Эти же два равенства, выраженные через