

где A — постоянная; последнюю можно считать вещественной (это сводится к надлежащему выбору начала отсчета времени), и тогда

$$\Omega_1 = A \cos \omega t, \quad \Omega_2 = A \sin \omega t. \quad (36,7)$$

Этот результат показывает, что проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную к оси волчка, вращается в этой плоскости с угловой скоростью ω , оставаясь постоянной по величине ($\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = A$). Поскольку проекция Ω_3 на ось волчка тоже постоянна, то мы заключаем, что и весь вектор Ω равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси волчка, оставаясь неизменным по величине. Ввиду связи $M_1 = I_1 \Omega_1$, $M_2 = I_2 \Omega_2$, $M_3 = I_3 \Omega_3$ между компонентами векторов Ω и M такое же движение (по отношению к оси волчка) совершает, очевидно, и вектор момента M .

Полученная картина представляет собой, разумеется, лишь другой аспект того же движения волчка, которое уже было рассмотрено в §§ 33 и 35 по отношению к неподвижной системе координат. В частности, угловая скорость вращения вектора M (ось Z на рис. 48) вокруг направления x_3 совпадает, в терминах эйлеровых углов, с угловой скоростью — $\dot{\psi}$. С помощью уравнений (35,4) имеем:

$$\dot{\psi} = \frac{M \cos \theta}{I_3} - \dot{\phi} \cos \theta = M \cos \theta \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right)$$

или

$$-\dot{\phi} = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1}$$

в согласии с (36,6).

§ 37. Асимметрический волчок

Применим уравнения Эйлера к более сложной задаче о свободном вращении асимметрического волчка, у которого все три момента инерции различны. Для определенности будем считать, что

$$I_3 > I_2 > I_1. \quad (37,1)$$

Два интеграла уравнений Эйлера известны заранее. Они даются законами сохранения энергии и момента и выражаются равенствами

$$\begin{aligned} I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2 &= 2E, \\ I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2 + I_3^2 \Omega_3^2 &= M^2, \end{aligned} \quad (37,2)$$

где энергия E и абсолютная величина момента M — заданные постоянные. Эти же два равенства, выраженные через

компоненты вектора \mathbf{M} , имеют вид

$$\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E, \quad (37,3)$$

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2. \quad (37,4)$$

Уже отсюда можно сделать некоторые заключения о характере движения волчка. Для этого заметим, что уравнения (37,3) и (37,4) представляют собой, геометрически, в осях M_1 , M_2 , M_3 , уравнения соответственно поверхности эллипсоида с полуосями

$$\sqrt{2EI_1}, \quad \sqrt{2EI_2}, \quad \sqrt{2EI_3}$$

и сферы с радиусом M . При перемещении вектора \mathbf{M} (относительно осей инерции волчка) его конец движется вдоль линии пересечения указанных поверхностей (на рис. 51 изображен ряд

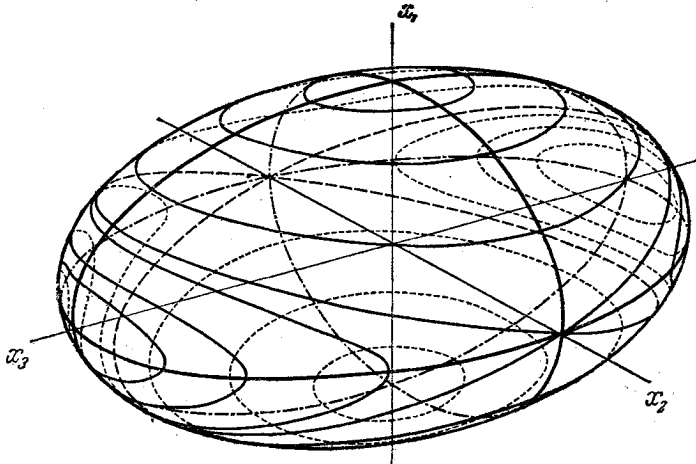


Рис. 51

таких линий пересечения эллипсоида со сферами различных радиусов). Самое наличие пересечения обеспечивается очевидными неравенствами

$$2EI_1 < M^2 < 2EI_3, \quad (37,5)$$

геометрически означающими, что радиус сферы (37,4) лежит между наименьшей и наибольшей из полуосей эллипсоида (37,3).

Проследим за изменением характера этих «траекторий» конца вектора \mathbf{M} ¹⁾ по мере изменения величины M (при

¹⁾ Аналогичные кривые, описываемые концом вектора $\mathbf{\Omega}$, называются *полодиями*.

заданной энергии E). Когда M^2 лишь немногим превышает $2EI_1$, сфера пересекает эллипсоид по двум замкнутым маленьким кривым, окружающим ось x_1 вблизи соответствующих двух полюсов эллипсоида (при $M^2 \rightarrow 2EI_1$ эти кривые стягиваются в точки — полюсы). По мере увеличения M^2 кривые расширяются, а при $M^2 = 2EI_2$ превращаются в две плоские кривые (эллипсы), пересекающиеся друг с другом в полюсах эллипсоида на оси x_2 . При дальнейшем увеличении M^2 вновь возникают две отдельные замкнутые траектории, но окружающие уже полюсы на оси x_3 ; при $M^2 \rightarrow 2EI_3$ они стягиваются в эти две точки.

Отметим, прежде всего, что замкнутость траекторий означает периодичность перемещения вектора \mathbf{M} по отношению к телу волчка; за время периода вектор \mathbf{M} описывает некоторую коническую поверхность, возвращаясь в прежнее положение.

Далее отметим существенно различный характер траекторий, близких к различным полюсам эллипсоида. Вблизи осей x_1 и x_3 траектории расположены целиком в окрестности полюсов, а траектории, проходящие вблизи полюсов на оси x_2 , в своем дальнейшем ходе удаляются на большие расстояния от этих точек. Такое различие соответствует разному характеру устойчивости вращения волчка вокруг его трех осей инерции. Вращение вокруг осей x_1 и x_3 (отвечающих наибольшему и наименьшему из трех моментов инерции волчка) устойчиво в том смысле, что при малом отклонении от этих состояний волчок будет продолжать совершать движение, близкое к первоначальному. Вращение же вокруг оси x_2 неустойчиво; достаточно малого отклонения, чтобы возникло движение, уводящее волчок в положения, далекие от первоначального.

Для определения зависимости компонент Ω (или пропорциональных им компонент \mathbf{M}) от времени обратимся к уравнениям Эйлера (36,5). Выразим Ω_1 и Ω_3 через Ω_2 из двух уравнений (37,2), (37,3)

$$\begin{aligned}\Omega_1^2 &= \frac{1}{I_1(I_3 - I_1)} \{ (2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2 \}, \\ \Omega_3^2 &= \frac{1}{I_3(I_3 - I_1)} \{ (M^2 - 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2 \}\end{aligned}\quad (37,6)$$

и подставив во второе из уравнений (36,5), найдем:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_2}{dt} &= \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 = \\ &= \frac{1}{I_2 \sqrt{I_1 I_3}} \{ [(2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2] [(M^2 - 2EI_1) - \\ &\quad - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2] \}^{1/2}.\end{aligned}\quad (37,7)$$

Разделяя в этом уравнении переменные и интегрируя, получим функцию $t(\Omega_2)$, в виде эллиптического интеграла. При приве-

дении его к стандартному виду будем считать для определенности, что

$$M^2 > 2EI_2$$

(в обратном случае во всех следующих ниже формулах надо переставить индексы 1 и 3). Вводим вместо t и Ω_2 новые переменные

$$\tau = t \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}{I_1 I_2 I_3}}, \quad s = \Omega_2 \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{2EI_3 - M^2}} \quad (37,8)$$

и положительный параметр $k^2 < 1$ согласно

$$k^2 = \frac{(I_2 - I_1)(2EI_3 - M^2)}{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}. \quad (37,9)$$

Тогда получим:

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

(начало отсчета времени условно выбираем в момент, когда $\Omega_2 = 0$). При обращении этого интеграла возникает, как известно, одна из эллиптических функций Якоби

$$s = \operatorname{sn} \tau,$$

чем и определяется зависимость Ω_2 от времени. Функции $\Omega_1(t)$ и $\Omega_3(t)$ выражаются алгебраически через $\Omega_2(t)$ согласно равенствам (37,6). Учитывая определение двух других эллиптических функций

$$\operatorname{cn} \tau = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \tau}, \quad \operatorname{dn} \tau = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \tau},$$

получим окончательно следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn} \tau, \\ \Omega_2 &= \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn} \tau, \\ \Omega_3 &= \sqrt{\frac{M^2 - 2EI_1}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \tau. \end{aligned} \quad (37,10)$$

Функции (37,10) — периодические, причем их период по переменной τ равен, как известно, величине $4K$, где K есть полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}}. \quad (37,11)$$

Период же по времени дается, следовательно, выражением

$$T = 4K \sqrt{\frac{I_1 I_2 I_3}{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}}. \quad (37,12)$$

По истечении этого времени вектор Ω возвращается в свое начальное положение относительно осей волчка. (Самый же волчок при этом отнюдь не возвращается в свое прежнее положение относительно неподвижной системы координат — см. ниже.)

При $I_1 = I_2$ формулы (37,10), разумеется, приводятся к формулам, полученным в предыдущем параграфе для симметрического волчка. Действительно, при $I_1 \rightarrow I_2$ параметр $k^2 \rightarrow 0$, эллиптические функции вырождаются в круговые:

$$\operatorname{sn} \tau \rightarrow \sin \tau, \quad \operatorname{cn} \tau \rightarrow \cos \tau, \quad \operatorname{dn} \tau \rightarrow 1,$$

и мы возвращаемся к формулам (36,7).

При $M^2 = 2EI_3$ имеем: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = \text{const}$, т. е. вектор Ω постоянно направлен вдоль оси инерции x_3 ; этот случай соответствует равномерному вращению волчка вокруг оси x_3 . Аналогичным образом при $M^2 = 2EI_1$ (при этом $\tau \equiv 0$) имеем равномерное вращение вокруг оси x_1 .

Перейдем к определению абсолютного (по отношению к неподвижной системе координат X, Y, Z) движения волчка в пространстве как функции времени. Для этого вводим эйлеровы углы ψ, φ, θ между осями волчка x_1, x_2, x_3 и осями X, Y, Z , выбрав при этом неподвижную ось Z вдоль направления постоянного вектора \mathbf{M} . Поскольку полярный угол и азимут направления Z по отношению к осям x_1, x_2, x_3 равны соответственно θ и $\frac{\pi}{2} - \psi$ (см. примечание на стр. 144), то, проектируя вектор \mathbf{M} на оси x_1, x_2, x_3 , получим:

$$\begin{aligned} M \sin \theta \sin \psi &= M_1 = I_1 \Omega_1, \\ M \sin \theta \cos \psi &= M_2 = I_2 \Omega_2, \\ M \cos \theta &= M_3 = I_3 \Omega_3. \end{aligned} \quad (37,13)$$

Отсюда

$$\cos \theta = I_3 \Omega_3 / M, \quad \operatorname{tg} \psi = I_1 \Omega_1 / I_2 \Omega_2, \quad (37,14)$$

и, используя формулы (37,10), найдем:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sqrt{\frac{I_3(M^2 - 2EI_1)}{M^2(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \tau, \\ \operatorname{tg} \psi &= \sqrt{\frac{I_1(I_3 - I_2)}{I_2(I_3 - I_1)}} \frac{\operatorname{cn} \tau}{\operatorname{sn} \tau}, \end{aligned} \quad (37,15)$$

чем и определяется зависимость углов θ и ψ от времени; вместе с компонентами вектора Ω они являются периодическими функциями с периодом (37,12).

Угол φ в формулы (37,13) не входит, и для его вычисления надо обратиться к формулам (35,1), выражающим компоненты Ω через производные по времени эйлеровых углов. Исключая $\dot{\theta}$ из равенств

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi,\end{aligned}$$

получим:

$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_1 \sin \psi + \Omega_2 \cos \psi}{\sin \theta},$$

после чего, используя формулы (37,13), найдем:

$$\frac{d\varphi}{dt} = M \frac{I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2}{I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2}. \quad (37,16)$$

Отсюда функция $\varphi(t)$ определяется квадратурой, но подынтегральное выражение содержит сложным образом эллиптические функции. Путем ряда довольно сложных преобразований этот интеграл может быть выражен через так называемые тэта-функции; не приводя вычислений¹⁾, укажем лишь их окончательный результат.

Функция $\varphi(t)$ может быть представлена (с точностью до произвольной аддитивной постоянной) в виде суммы двух членов

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \quad (37,17)$$

один из которых дается формулой

$$e^{2i\varphi_1(t)} = \frac{\vartheta_{01} \left(\frac{2t}{T} - i\alpha \right)}{\vartheta_{01} \left(\frac{2t}{T} + i\alpha \right)}, \quad (37,18)$$

где ϑ_{01} — тэта-функция, а α — вещественная постоянная, определяющаяся равенством

$$\operatorname{sn}(i2\alpha K) = i \sqrt{\frac{I_3(M^2 - 2EI_1)}{I_1(2EI_3 - M^2)}} \quad (37,19)$$

(K и T — из (37,11), (37,12)). Функция в правой стороне (37,18) — периодическая с периодом $T/2$, так что $\varphi_1(t)$ изменяется на 2π за время T . Второе слагаемое в (37,17) дается формулой

$$\varphi_2(t) = 2\pi \frac{t}{T'}, \quad \frac{1}{T'} = \frac{M}{2\pi I_1} - \frac{i}{\pi T} \frac{\vartheta'_{01}(i\alpha)}{\vartheta_{01}(i\alpha)}. \quad (37,20)$$

¹⁾ Их можно найти в книге Е. Т. Уиттекер, Аналитическая динамика. — М.: ОНТИ, 1937.

Эта функция испытывает приращение 2π за время T' . Таким образом, движение по углу φ представляет собой совокупность двух периодических изменений, причем один из периодов (T) совпадает с периодом изменения углов ψ и θ , а другой (T') — несоизмерим с первым. Последнее обстоятельство приводит к тому, что при своем движении волчок никогда не возвращается, строго говоря, в свое первоначальное положение.

Задачи

1. Определить свободное вращение волчка вокруг оси, близкой к оси инерции x_3 (или x_1).

Решение. Пусть к направлению \mathbf{M} близка ось x_3 . Тогда компоненты M_1 и M_2 являются малыми величинами, а компонента $M_3 \approx M$ (с точностью до величин первого порядка малости). С этой же точностью первые два из уравнений Эйлера (36,5) напишутся в виде

$$\frac{dM_1}{dt} = \left(1 - \frac{I_3}{I_2}\right) \Omega_0 M_2, \quad \frac{dM_2}{dt} = \left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \Omega_0 M_1,$$

где мы ввели постоянную $\Omega_0 = M/I_3$. Следуя общим правилам, ищем решение для M_1, M_2 в виде, пропорциональном $e^{i\omega t}$, и для частоты ω получаем значение

$$\omega = \Omega_0 \sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right)}. \quad (1)$$

Для самих же величин M_1 и M_2 получим

$$M_1 = Ma \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \cos \omega t, \quad M_2 = Ma \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} \sin \omega t, \quad (2)$$

где a — произвольная малая постоянная. Этими формулами определяется движение вектора \mathbf{M} относительно волчка; в построении на рис. 51 конец вектора \mathbf{M} описывает (с частотой ω) малый эллипс вокруг полюса на оси x_3 .

Для определения абсолютного движения волчка в пространстве определяем его эйлеровы углы. В данном случае угол наклона θ оси x_3 к оси Z (направлению \mathbf{M}) мал, и согласно формулам (37,14)

$$\operatorname{tg} \psi = M_1/M_2, \quad \theta^2 \approx 2(1 - \cos \theta) = 2\left(1 - \frac{M_3}{M}\right) \approx \frac{M_1^2 + M_2^2}{M^2};$$

подставляя (2), получаем:

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{I_1(I_3 - I_2)}{I_2(I_3 - I_1)}} \operatorname{ctg} \omega t,$$

$$\theta^2 = a^2 \left[\left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right) \cos^2 \omega t + \left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \sin^2 \omega t \right]. \quad (3)$$

Для вычисления угла φ замечаем, что согласно третьей из формул (35.1) при $\theta \ll 1$

$$\Omega_0 \approx \Omega_3 \approx \dot{\psi} + \dot{\varphi}.$$

Поэтому

$$\varphi = \Omega_0 t - \psi \quad (4)$$

(произвольную постоянную интегрирования опускаем).

Более наглядное представление о характере движения волчка получается, если проследить непосредственно за изменением направления его трех осей инерции (единичные векторы вдоль этих осей обозначим посредством \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 , \mathbf{n}_3). Векторы \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 равномерно вращаются в плоскости $X'Y'$ с частотой Ω_0 , одновременно испытывая малые колебания с частотой ω в поперечном направлении; эти колебания определяются Z -компонентами указанных векторов, для которых имеем:

$$n_{1Z} \approx \frac{M_1}{M} = a \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \cos \omega t,$$

$$n_{2Z} \approx \frac{M_2}{M} = a \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} \sin \omega t.$$

Для вектора \mathbf{n}_3 имеем с той же точностью:

$$n_{3x} \approx \theta \sin \varphi, \quad n_{3y} \approx -\theta \cos \varphi, \quad n_{3z} \approx 1$$

(полярный угол и азимут направления \mathbf{n}_3 по отношению к осям X , Y , Z равны θ и $\varphi - \frac{\pi}{2}$; см. примечание на стр. 144). Далее пишем (используя при этом формулы (37,13)):

$$\begin{aligned} n_{3x} &= \theta \sin(\Omega_0 t - \psi) = \theta \sin \Omega_0 t \cos \psi - \theta \cos \Omega_0 t \sin \psi = \\ &= \frac{M_2}{M} \sin \Omega_0 t - \frac{M_1}{M} \cos \Omega_0 t = \\ &= a \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} \sin \Omega_0 t \sin \omega t - a \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \cos \Omega_0 t \cos \omega t, \end{aligned}$$

или окончательно:

$$\begin{aligned} n_{3x} &= -\frac{a}{2} \left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right) \cos(\Omega_0 + \omega)t + \\ &+ \frac{a}{2} \left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right) \cos(\Omega_0 - \omega)t. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned} n_{3y} &= -\frac{a}{2} \left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right) \sin(\Omega_0 + \omega)t + \\ &+ \frac{a}{2} \left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right) \sin(\Omega_0 - \omega)t. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что движение вектора \mathbf{n}_3 представляет собой наложение двух вращений вокруг оси Z с частотами $(\Omega_0 \pm \omega)$.

2. Определить свободное вращение волчка при $M^2 = 2EI_2$.

Решение. Этот случай отвечает в построении на рис. 51 перемещению конца вектора \mathbf{M} по кривой, проходящей через полюс на оси x_2 .

Уравнение (37,7) принимает вид

$$\frac{ds}{d\tau} = 1 - s^2, \quad \tau = t \sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3}} \Omega_0, \quad s = \frac{\Omega_2}{\Omega_0},$$

где введено обозначение $\Omega_0 = M/I_2 = 2E/M$. Интегрируя это уравнение, а затем воспользовавшись формулами (37,6), получим:

$$\Omega_1 = \Omega_0 \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{I_1(I_3 - I_1)}} \frac{1}{\text{ch } \tau},$$

$$\Omega_2 = \Omega_0 \text{th } \tau,$$

$$\Omega_3 = \Omega_0 \sqrt{\frac{I_2(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)}} \frac{1}{\text{ch } \tau}.$$

Для описания абсолютного движения волчка вводим эйлеровы углы, определив θ как угол между осью Z (направлением M) и осью инерции волчка x_2 (а не x_3 , как в тексте). В формулах (37,14), (37,16), связывающих компоненты вектора Ω с эйлеровыми углами, надо при этом сделать циклическую перестановку индексов $123 \rightarrow 312$. Подставив затем в эти формулы выражения (1), получим:

$$\cos \theta = \text{th } \tau, \quad \varphi = \Omega_0 t + \text{const}, \quad \text{tg } \psi = \sqrt{\frac{I_3(I_2 - I_1)}{I_1(I_3 - I_2)}}.$$

Из полученных формул видно, что вектор Ω асимптотически (при $t \rightarrow \infty$) приближается к оси x_2 , которая одновременно асимптотически приближается к неподвижной оси Z .

§ 38. Соприкосновение твердых тел

Условия равновесия твердого тела, как это видно из уравнений движения (34,1) и (34,3), можно сформулировать в виде равенства нулю действующих на него полной силы и полного момента сил:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \sum \mathbf{f} &= 0, \\ \mathbf{K} = \sum [\mathbf{r}\mathbf{f}] &= 0. \end{aligned} \quad (38,1)$$

Суммирование производится здесь по всем приложенным к телу внешним силам, а \mathbf{r} — радиус-векторы «точек приложения» сил; при этом точка (начало координат), относительно которой определяются моменты, может быть выбрана произвольным образом: при $\mathbf{F} = 0$ значение \mathbf{K} не зависит от этого выбора (см. (34,5)).

Если мы имеем дело с системой соприкасающихся друг с другом твердых тел, то в равновесии условия (38,1) должны выполняться для каждого из тел в отдельности. При этом в число сил должны быть включены также и силы, действующие на данное тело со стороны остальных соприкасающихся с ним тел. Эти силы приложены в точках соприкосновения тел и называются *силами реакции*. Очевидно, что для каждых двух тел их взаимные силы реакции равны по величине и противоположны по направлению.

В общем случае как величины, так и направления реакций определяются в результате совместного решения системы урав-