где введено обозначение $\Omega_0 = M/I_2 = 2E/M$. Интегрируя это уравнение, а затем воспользовавшись формулами (37,6), получим:

$$\Omega_1 = \Omega_0 \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{I_1(I_3 - I_1)}} \frac{1}{\operatorname{ch} \tau},$$
$$\Omega_2 = \Omega_0 \operatorname{th} \tau,$$
$$\Omega_3 = \Omega_0 \sqrt{\frac{I_2(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)}} \frac{1}{\operatorname{ch} \tau}.$$

Для описания абсолютного движения волчка вводим эйлеровы углы, определив θ как угол между осью Z (направлением $\mathbf{M}$) и осью инерции волчка x_2 (а не x_3, как в тексте). В формулах (37,14), (37,16), связывающих компоненты вектора $\mathbf{\Omega}$ с эйлеровыми углами, надо при этом сделать циклическую перестановку индексов $123 \to 312$. Подставив затем в эти формулы выражения (1), получим:

$$\cos\theta = \operatorname{th}\tau, \qquad \varphi = \Omega_0 t + \mathrm{const}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{I_3(I_2 - I_1)}{I_1(I_3 - I_2)}}.$$

Из полученных формул видно, что вектор $\mathbf{\Omega}$ асимптотически (при $t \to \infty$) приближается к оси x_2, которая одновременно асимптотически приближается к неподвижной оси Z.

§ 38. Соприкосновение твердых тел

Условия равновесия твердого тела, как это видно из уравнений движения (34,1) и (34,3), можно сформулировать в виде равенства нулю действующих на него полной силы и полного момента сил:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{f} = 0,$$
$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{rf}] = 0. \tag{38,1}$$

Суммирование производится здесь по всем приложенным к телу внешним силам, а $\mathbf{r}$ — радиус-векторы «точек приложения» сил; при этом точка (начало координат), относительно которой определяются моменты, может быть выбрана произвольным образом: при $\mathbf{F} = 0$ значение $\mathbf{K}$ не зависит от этого выбора (см. (34,5)).

Если мы имеем дело с системой соприкасающихся друг с другом твердых тел, то в равновесии условия (38,1) должны выполняться для каждого из тел в отдельности. При этом в число сил должны быть включены также и силы, действующие на данное тело со стороны остальных соприкасающихся с ним тел. Эти силы приложены в точках соприкосновения тел и называются *силами реакции*. Очевидно, что для каждых двух тел их взаимные силы реакции равны по величине и противоположны по направлению.

В общем случае как величины, так и направления реакций определяются в результате совместного решения системы уравнений равновесия (38,1) для всех тел. В некоторых случаях, однако, направления сил реакции задаются уже условиями задачи. Так, если два тела могут свободно скользить по поверхности друг друга, то силы реакции между ними направлены по нормали к поверхности.

Если соприкасающиеся тела движутся друг относительно друга, то, кроме сил реакции, появляются также силы диссипативного характера — *силы трения.*

Возможны два типа движения соприкасающихся тел — *скольжение* и *качение.* При скольжении реакции перпендикулярны к соприкасающимся поверхностям, а силы трения направлены по касательным к ним.

Чистое качение характеризуется тем, что в точках соприкосновения нет относительного движения тел; другими словами, катящееся тело в каждый момент времени как бы закреплено в точке соприкосновения. При этом направление силы реакции произвольно, т. е. не обязательно нормально к соприкасающимся поверхностям. Трение же при качении проявляется в виде дополнительного момента сил, препятствующего качению.

Если при скольжении трение настолько мало, что им можно вовсе пренебречь, то поверхности тел называются *абсолютно гладкими.* Напротив, если свойства поверхности допускают лишь чистое качение тел без скольжения, а трением при качении можно пренебречь, то поверхности называют *абсолютно шероховатыми.*

В обоих случаях силы трения не фигурируют явным образом в задаче о движении тел, и потому задача является чисто механической. Если же конкретные свойства трения существенны для движения, то последнее не является уже чисто механическим процессом (ср. § 25).

Соприкосновение тел уменьшает число их степеней свободы по сравнению с тем, которым они обладали бы при свободном движении. До сих пор при рассмотрении такого рода задач мы учитывали это обстоятельство путем введения координат, непосредственно соответствующих реальному числу степеней свободы. При качении тел, однако, такой выбор координат может оказаться невозможным.

Условие, накладываемое на движение тел при качении, заключается в равенстве скоростей соприкасающихся точек (так, при качении тела по неподвижной поверхности скорость точки соприкосновения должна быть равна нулю). В общем случае такое условие выражается *уравнениями связей* вида

$$\sum_i c_{\alpha i}\dot{q}_i = 0, \tag{38,2}$$

где $c_{\alpha i}$ — функции только координат (индекс α нумерует уравнения связей). Если левые стороны равенств не являются полными производными по времени каких-либо функций координат, то эти уравнения не могут быть проинтегрированы. Другими словами, они не сведутся к соотношениям между одними только координатами, которыми можно было бы воспользоваться для того, чтобы выразить положение тел через меньшее число координат в соответствии с реальным числом степеней свободы. Такие связи называют *неголономными* (в противоположность *голономным*, связывающим лишь координаты системы).

Рассмотрим, например, качение шара по плоской поверхности. Как обычно, обозначим посредством $\mathbf{V}$ скорость поступательного движения (скорость центра шара), а посредством $\mathbf{\Omega}$ — угловую скорость вращения его. Скорость точки касания шара с плоскостью получится, если положить $\mathbf{r} = -a\mathbf{n}$ в общей формуле $\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\mathbf{\Omega r}]$ (a — радиус шара, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к плоскости качения в точке соприкосновения). Искомая связь представляет собой условие отсутствия скольжения в точке касания, т. е. дается уравнением

$$\mathbf{V} - a[\mathbf{\Omega n}] = 0. \tag{38,3}$$

Оно не может быть проинтегрировано: хотя скорость $\mathbf{V}$ представляет собой полную производную по времени от радиус-вектора центра шара, но зато угловая скорость не является в общем случае полной производной каких-либо координат. Таким образом, связь (38,3) неголономна[1]).

Поскольку уравнения неголономных связей нельзя использовать для уменьшения числа координат, то при наличии таких связей неизбежно приходится пользоваться координатами, которые не все независимы. Для составления соответствующих уравнений Лагранжа снова вернемся к принципу наименьшего действия.

Наличие связей вида (38,2) налагает определенные ограничения на возможные значения вариаций координат. Именно, умножив эти уравнения на δt, мы найдем, что вариации δq_i не независимы, а связаны соотношениями

$$\sum_i c_{\alpha i}\,\delta q_i = 0. \tag{38,4}$$

Это обстоятельство должно быть учтено при варьировании действия. Согласно общему методу Лагранжа для нахождения

[1]) Заметим, что такая же связь для качения цилиндра была бы голономной. В этом случае ось вращения сохраняет при качении постоянное направление в пространстве, и потому $\Omega = d\varphi/dt$ является полной производной от угла поворота φ цилиндра вокруг своей оси. Соотношение (38,3) при этом интегрируется и дает связь между координатой центра инерции и углом φ.

условных экстремумов, надо к подынтегральному выражению вариации действия

$$\delta S = \int \sum_i \delta q_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dt$$

прибавить умноженные на неопределенные множители (функции координат) λ_α уравнения (38,4), после чего потребовать обращения интеграла в нуль. При этом можно уже считать все вариации δq_i независимыми, и мы получим уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_{\alpha i}. \tag{38,5}$$

Вместе с уравнениями связей (38,2) они составляют полную систему уравнений для неизвестных величин q_i и λ_α.

В изложенном методе силы реакции вообще не фигурируют; соприкосновение тел целиком учитывается уравнениями связей. Существует, однако, и другой метод составления уравнений движения соприкасающихся тел, в котором силы реакции вводятся явным образом. Сущность этого метода (составляющего содержание так называемого *принципа д'Аламбера*) состоит в том, что для каждого из соприкасающихся тел пишутся уравнения

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \mathbf{f}, \qquad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum [\mathbf{rf}], \tag{38,6}$$

причем в число действующих на тело сил $\mathbf{f}$ включаются также и силы реакции; эти силы заранее неизвестны и сами определяются вместе с движением тела в результате решения уравнений. Этот метод в равной степени применим как при голономных, так и при неголономных связях.

Задачи

1. Пользуясь принципом д'Аламбера, найти уравнения движения однородного шара, катящегося по плоскости под действием приложенных к нему внешней силы $\mathbf{F}$ и момента сил $\mathbf{K}$.

Решение. Уравнение связи (38,3) написано уже в тексте. Вводя силу реакции (обозначим ее, как $\mathbf{R}$), приложенную в точке касания шара с плоскостью, напишем уравнения (38,6):

$$\mu \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \tag{1}$$

$$I \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = \mathbf{K} - a[\mathbf{nR}] \tag{2}$$

(здесь учтено, что $\mathbf{P} = \mu\mathbf{V}$ и что для шарового волчка $\mathbf{M} = I\mathbf{\Omega}$). Дифференцируя уравнение связи (38,3) по времени, получим:

$$\dot{\mathbf{V}} = a[\dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{n}].$$

Подставив в уравнение (1) и исключая $\dot{\Omega}$ с помощью (2), найдем уравнение

$$\frac{I}{a\mu}(\mathbf{F}+\mathbf{R}) = [\mathbf{K}\mathbf{n}] - a\mathbf{R} + a\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{R}),$$

связывающее силу реакции с $\mathbf{F}$ и $\mathbf{K}$. Расписав это уравнение в компонентах и подставив $I = \frac{2}{5}\mu a^2$ (см. задачу 2, б, § 32), будем иметь:

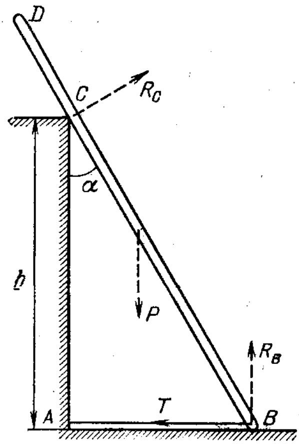

Рис. 52

$$R_x = \frac{5}{7a}K_y - \frac{2}{7}F_x,$$

$$R_y = -\frac{5}{7a}K_x - \frac{2}{7}F_y, \qquad R_z = -F_z$$

(плоскость x, y выбрана в плоскости качения). Наконец, подставив эти выражения в (1), получим уравнения движения, содержащие уже только заданные внешние силу и момент:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{5}{7\mu}\left(F_x + \frac{K_y}{a}\right),$$

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{5}{7\mu}\left(F_y - \frac{K_x}{a}\right).$$

Компоненты Ω_x, Ω_y угловой скорости выражаются через V_x и V_y с помощью уравнения связи (38,3), а для Ω_z имеем уравнение $\frac{2}{5}\mu a^2\frac{d\Omega_z}{dt} = K_z$ (z-компонента уравнения (2)).

2. Однородный стержень BD весом P и длиной l опирается на стену, как показано на рис. 52; его нижний конец B удерживается нитью AB. Определить реакцию опор и натяжение нити.

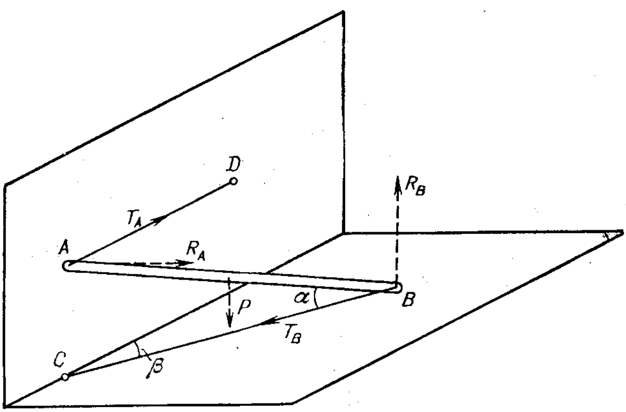

Рис. 53

Решение. Вес стержня представляется приложенной к его середине силой P, направленной вертикально вниз. Силы реакции R_B и R_C направлены соответственно вертикально вверх и перпендикулярно к стержню; натяжение нити T направлено от B к A. Решение уравнений равновесия дает:

$$R_C = \frac{Pl}{4h}\sin 2\alpha, \quad R_B = P - R_C \sin\alpha, \quad T = R_C \cos\alpha.$$

3. Стержень AB весом P опирается своими концами на горизонтальную и вертикальную плоскости (рис. 53) и удерживается в этом положении двумя горизонтальными нитями AD и BC; нить BC находится в одной (вертикальной) плоскости со стержнем AB. Определить реакции опор и натяжения нитей.

Решение. Натяжения нитей T_A и T_B направлены от A к D и от B к C. Реакции R_A и R_B перпендикулярны к соответствующим плоскостям. Решение уравнений равновесия дает:

$$R_B = P, \quad T_B = \frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha, \quad R_A = T_B \sin\beta,$$
$$T_A = T_B \cos\beta.$$

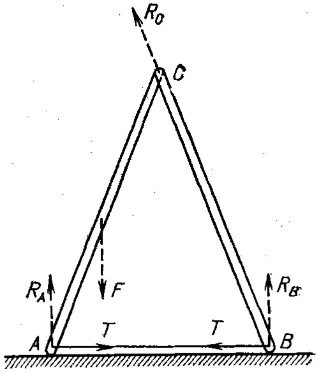

Рис. 54

4. Два стержня длиной l соединены сверху шарниром, а снизу скреплены нитью AB (рис. 54). К середине одного из стержней приложена сила F (весом стержней пренебрегаем). Определить силы реакции.

Решение. Натяжение нити T действует в точке A от A к B, а в точке B — от B к A. Реакции R_A и R_B в точках A и B перпендикулярны к плоскости опоры. Посредством $\mathbf{R}_C$ обозначим силу реакции в шарнире, действующую на стержень AC; тогда на стержень BC действует реакция $-\mathbf{R}_C$. Условие равенства нулю суммы моментов сил $\mathbf{R}_B$, T и $-\mathbf{R}_C$, действующих на стержень BC, приводит к результату, что вектор $\mathbf{R}_C$ направлен вдоль BC. Остальные условия равновесия (для каждого из двух стержней) приводят к значениям

$$R_A = \frac{3}{4}F, \quad R_B = \frac{F}{4}, \quad R_C = \frac{F}{4\sin\alpha}, \quad T = \frac{1}{4}F\operatorname{ctg}\alpha,$$

где α — угол CAB.

§ 39. Движение в неинерциальной системе отсчета

До сих пор, рассматривая движение любой механической системы, мы всегда относили его к инерциальной системе отсчета. Только в инерциальных системах отсчета функция Лагранжа, например, одной частицы во внешнем поле имеет вид

$$L_0 = \frac{m\mathbf{v}_0^2}{2} - U, \tag{39,1}$$

и соответственно уравнение движения

$$m\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$$

(мы будем в этом параграфе отличать индексом 0 величины, относящиеся к инерциальной системе отсчета).