нити T направлено от B к A. Решение уравнений равновесия дает:

$$R_C = \frac{Pl}{4h}\sin 2\alpha, \quad R_B = P - R_C \sin\alpha, \quad T = R_C\cos\alpha.$$

3. Стержень AB весом P опирается своими концами на горизонтальную и вертикальную плоскости (рис. 53) и удерживается в этом положении двумя горизонтальными нитями AD и BC; нить BC находится в одной (вертикальной) плоскости со стержнем AB. Определить реакции опор и натяжения нитей.

Решение. Натяжения нитей T_A и T_B направлены от A к D и от B к C. Реакции R_A и R_B перпендикулярны к соответствующим плоскостям. Решение уравнений равновесия дает:

$$R_B = P, \quad T_B = \frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha, \quad R_A = T_B\sin\beta,$$
$$T_A = T_B\cos\beta.$$

4. Два стержня длиной l соединены сверху шарниром, а снизу скреплены нитью AB (рис. 54). К середине одного из стержней приложена сила F (весом стержней пренебрегаем). Определить силы реакции.

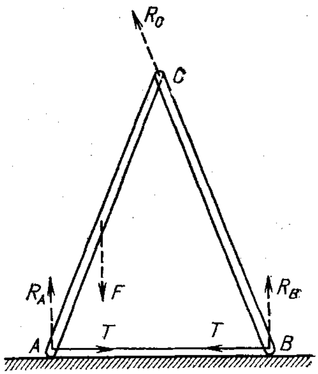

Рис. 54

Решение. Натяжение нити T действует в точке A от A к B, а в точке B — от B к A. Реакции R_A и R_B в точках A и B перпендикулярны к плоскости опоры. Посредством $\mathbf{R}_C$ обозначим силу реакции в шарнире, действующую на стержень AC; тогда на стержень BC действует реакция $-\mathbf{R}_C$. Условие равенства нулю суммы моментов сил $\mathbf{R}_B$, T и $-\mathbf{R}_C$, действующих на стержень BC, приводит к результату, что вектор $\mathbf{R}_C$ направлен вдоль BC. Остальные условия равновесия (для каждого из двух стержней) приводят к значениям

$$R_A = \frac{3}{4}F, \quad R_B = \frac{F}{4}, \quad R_C = \frac{F}{4\sin\alpha}, \quad T = \frac{1}{4}F\operatorname{ctg}\alpha,$$

где α — угол CAB.

§ 39. Движение в неинерциальной системе отсчета

До сих пор, рассматривая движение любой механической системы, мы всегда относили его к инерциальной системе отсчета. Только в инерциальных системах отсчета функция Лагранжа, например, одной частицы во внешнем поле имеет вид

$$L_0 = \frac{m\mathbf{v}_0^2}{2} - U, \tag{39,1}$$

и соответственно уравнение движения

$$m\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$$

(мы будем в этом параграфе отличать индексом 0 величины, относящиеся к инерциальной системе отсчета).

Займемся теперь вопросом о том, как выглядят уравнения движения частицы в неинерциальной системе отсчета. Отправным пунктом при решении этого вопроса снова является принцип наименьшего действия, применимость которого не ограничена никаким выбором системы отсчета; вместе с ним остаются в силе и уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}. \tag{39,2}$$

Однако функция Лагранжа уже не имеет вида (39,1), и для ее нахождения необходимо произвести соответствующее преобразование функции L_0.

Это преобразование мы произведем в два приема. Рассмотрим сначала систему отсчета K', которая движется относительно инерциальной системы K_0 поступательно со скоростью $\mathbf{V}(t)$. Скорости $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}'$ частицы относительно систем K_0 и K' связаны друг с другом соотношением

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \mathbf{V}(t). \tag{39,3}$$

Подставив это выражение в (39,1), получим функцию Лагранжа в системе K'

$$L' = \frac{m\mathbf{v}'^2}{2} + m\mathbf{v}'\mathbf{V} + \frac{m}{2}\mathbf{V}^2 - U.$$

Но $V^2(t)$ есть заданная функция времени; она может быть представлена как полная производная по t от некоторой другой функции, и потому третий член в написанном выражении может быть опущен. Далее, $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$, где $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор частицы в системе координат K'; поэтому

$$m\mathbf{V}(t)\mathbf{v}' = m\mathbf{V}\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V}\mathbf{r}') - m\mathbf{r}'\frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Подставив это в функцию Лагранжа и снова опустив полную производную по времени, получим окончательно:

$$L' = \frac{mv'^2}{2} - m\mathbf{W}(t)\mathbf{r}' - U, \tag{39,4}$$

где $\mathbf{W} = d\mathbf{V}/dt$ — ускорение поступательного движения системы отсчета K'.

Составляя с помощью (39,4) уравнение Лагранжа, получим:

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} - m\mathbf{W}(t). \tag{39,5}$$

Мы видим, что в смысле своего влияния на уравнения движения частицы ускоренное поступательное движение системы отсчета эквивалентно появлению однородного силового поля, причем действующая в этом поле сила равна произведению массы частицы на ускорение $\mathbf{W}$ и направлена в противоположную этому ускорению сторону.

Введем теперь еще одну систему отсчета, K, которая имеет общее с системой K' начало, но вращается относительно нее с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}(t)$; по отношению же к инерциальной системе K_0 система K совершает как поступательное, так и вращательное движение.

Скорость $\mathbf{v}'$ частицы относительно системы K' складывается из ее скорости $\mathbf{v}$ относительно системы K и скорости $[\mathbf{\Omega r}]$ ее вращения вместе с системой K:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [\mathbf{\Omega r}]$$

(радиус-векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ частицы в системах K и K' совпадают). Подставив это выражение в функцию Лагранжа (39,4), получим:

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\mathbf{v}[\mathbf{\Omega r}] + \frac{m}{2}[\mathbf{\Omega r}]^2 - m\mathbf{Wr} - U. \tag{39,6}$$

Это есть общий вид функции Лагранжа частицы в произвольной неинерциальной системе отсчета. Отметим, что вращение системы отсчета приводит к появлению в функции Лагранжа члена особого вида — линейного по скорости частицы.

Для вычисления производных, входящих в уравнение Лагранжа, пишем полный дифференциал

$$dL = m\mathbf{v}\,d\mathbf{v} + m\,d\mathbf{v}[\mathbf{\Omega r}] + m\mathbf{v}[\mathbf{\Omega}\,d\mathbf{r}] + m[\mathbf{\Omega r}][\mathbf{\Omega}\,d\mathbf{r}] - m\mathbf{W}\,d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}d\mathbf{r} =$$
$$= m\mathbf{v}\,d\mathbf{v} + m\,d\mathbf{v}[\mathbf{\Omega r}] + m\,d\mathbf{r}[\mathbf{v\Omega}] + m[[\mathbf{\Omega r}]\mathbf{\Omega}]\,d\mathbf{r} - m\mathbf{W}\,d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}d\mathbf{r}.$$

Собирая члены, содержащие $d\mathbf{v}$ и $d\mathbf{r}$, найдем:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m[\mathbf{\Omega r}],$$
$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m[\mathbf{v\Omega}] + m[[\mathbf{\Omega r}]\mathbf{\Omega}] - m\mathbf{W} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

Подставив эти выражения в (39,2), получим искомое уравнение движения

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - m\mathbf{W} + m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{\Omega}}] + 2m[\mathbf{v\Omega}] + m[\mathbf{\Omega}[\mathbf{r\Omega}]]. \tag{39,7}$$

Мы видим, что «силы инерции», обусловленные вращением системы отсчета, слагаются из трех частей. Сила $m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{\Omega}}]$ связана с неравномерностью вращения, а две другие присутствуют и при равномерном вращении. Сила $2m[\mathbf{v\Omega}]$ называется *силой Кориолиса*; в отличие от всех ранее рассматривавшихся (не диссипативных) сил она зависит от скорости частицы. Сила

$m[\boldsymbol{\Omega}[\mathbf{r}\boldsymbol{\Omega}]]$ называется *центробежной*. Она направлена в плоскости, проходящей через $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ перпендикулярно к оси вращения (т. е. направлению $\boldsymbol{\Omega}$), в сторону от оси; по величине центробежная сила равна $m\rho\Omega^2$, где ρ — расстояние частицы от оси вращения.

Рассмотрим особо случай равномерно вращающейся системы координат, не имеющей поступательного ускорения. Положив в (39,6) и (39,7) $\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{const}$, $\mathbf{W} = 0$, получим функцию Лагранжа

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\mathbf{v}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}] + \frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]^2 - U \tag{39,8}$$

и уравнение движения

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}] + m[\boldsymbol{\Omega}[\mathbf{r}\boldsymbol{\Omega}]]. \tag{39,9}$$

Вычислим также энергию частицы в этом случае. Подставив

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}] \tag{39,10}$$

в $E = \mathbf{p}\mathbf{v} - L$, получим:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]^2 + U. \tag{39,11}$$

Обратим внимание на то, что в энергии линейный по скорости член отсутствует. Влияние вращения системы отсчета сводится к добавлению в энергию члена, зависящего только от координат частицы и пропорционального квадрату угловой скорости. Эта дополнительная потенциальная энергия $-\frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]^2$ называется *центробежной*.

Скорость $\mathbf{v}$ частицы относительно равномерно вращающейся системы отсчета связана с ее же скоростью $\mathbf{v}_0$ относительно инерциальной системы K_0 посредством

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]. \tag{39,12}$$

Поэтому импульс $\mathbf{p}$ (39,10) частицы в системе K совпадает с ее же импульсом $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}_0$ в системе K_0. Вместе с ними совпадают также моменты импульсов $\mathbf{M}_0 = [\mathbf{r}\mathbf{p}_0]$ и $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$. Энергии же частицы в системах K и K_0 различны. Подставив $\mathbf{v}$ из (39,12) в (39,11), получим:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - m\mathbf{v}_0[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}] + U = \frac{mv_0^2}{2} + U - m[\mathbf{r}\mathbf{v}_0]\boldsymbol{\Omega}.$$

Первые два члена представляют собой энергию E_0 в системе K_0. Вводя в последний член момент импульса, получим:

$$E = E_0 - \mathbf{M}\boldsymbol{\Omega}. \tag{39,13}$$

Этой формулой определяется закон преобразования энергии при переходе к равномерно вращающейся системе координат. Хотя мы вывели его для одной частицы, но очевидно, что вывод может быть непосредственно обобщен на случай любой системы частиц и приведет к той же формуле (39,13).

Задачи

1. Найти отклонение свободно падающего тела от вертикали, обусловленное вращением Земли. (Угловую скорость вращения считать малой.)

Решение. В поле тяжести $U = -m\mathbf{gr}$, где $\mathbf{g}$ — вектор ускорения силы тяжести; пренебрегая в уравнении (39,9) центробежной силой, содержащей квадрат Ω, получиум уравнение движения в виде

$$\dot{\mathbf{v}} = 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}] + \mathbf{g}. \qquad (1)$$

Решаем это уравнение последовательными приближениями. Для этого полагаем: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, где $\mathbf{v}_1$ — решение уравнения $\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{g}$, т. е. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0$ ($\mathbf{v}_0$ — начальная скорость). Подставляя $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ в (1) и оставляя справа только $\mathbf{v}_1$, получим уравнение для $\mathbf{v}_2$:

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = 2[\mathbf{v}_1\boldsymbol{\Omega}] = 2t[\mathbf{g}\boldsymbol{\Omega}] + 2[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\Omega}].$$

Интегрируя, получим:

$$\mathbf{r} = \mathbf{h} + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2} + \frac{t^3}{3}[\mathbf{g}\boldsymbol{\Omega}] + t^2[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\Omega}], \qquad (2)$$

где $\mathbf{h}$ — вектор начального положения частицы.

Выберем ось z по вертикали вверх, а ось x — по меридиану к полюсу; тогда

$$g_x = g_y = 0, \quad g_z = -g; \quad \Omega_x = \Omega\cos\lambda, \quad \Omega_y = 0; \quad \Omega_z = \Omega\sin\lambda,$$

где λ — широта (которую для определенности предполагаем северной). Положив в (2) $\mathbf{v}_0 = 0$, найдем:

$$x = 0, \qquad y = -\frac{t^3}{3} g\Omega\cos\lambda.$$

Подставив сюда время падения $t \approx \sqrt{2h/g}$, найдем окончательно:

$$x = 0, \qquad y = -\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} g\Omega\cos\lambda$$

(отрицательные значения y соответствуют отклонению на восток).

2. Определить отклонение от плоскости для тела, брошенного с поверхности Земли с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$.

Решение. Выбираем плоскость xz так, чтобы плоскость $\mathbf{v}_0$ лежала в ней. Начальная высота $\mathbf{h} = 0$. Для бокового отклонения получим из (2) (задача 1):

$$y = -\frac{t^3}{3} g\Omega_x + t^2(\Omega_x v_{0z} - \Omega_z v_{0x}),$$

или, подставив время полета $t \approx 2v_{0z}/g$:

$$y = \frac{4v_{0z}^2}{g^2}\left(\frac{1}{3} v_{0z}\Omega_x - v_{0x}\Omega_z\right).$$

3. Определить влияние, оказываемое вращением Земли на малые колебания маятника (так называемый *маятник Фуко*).

Решение. Пренебрегая вертикальным смещением маятника как малой величиной второго порядка, можно считать движение тела происходящим в горизонтальной плоскости xy. Опуская члены, содержащие Ω^2, напишем уравнения движения в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_z \dot{y}, \qquad \ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_z \dot{x},$$

где ω — частота колебаний маятника без учета вращения Земли. Умножив второе уравнение на i и сложив с первым, получим одно уравнение

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_z \dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0$$

для комплексной величины $\xi = x + iy$. При $\Omega_z \ll \omega$ решение этого уравнения имеет вид

$$\xi = e^{-i\Omega_z t}\left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right)$$

или

$$x + iy = e^{-i\Omega_z t}(x_0 + iy_0),$$

где функции $x_0(t)$, $y_0(t)$ дают траекторию маятника без учета вращения Земли. Влияние этого вращения сводится, следовательно, к повороту траектории вокруг вертикали с угловой скоростью Ω_z.