ГЛАВА VII

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 40. Уравнения Гамильтона

Формулирование законов механики с помощью функции Лагранжа (и выводимых из нее уравнений Лагранжа) предполагает описание механического состояния системы путем задания ее обобщенных координат и скоростей. Такое описание, однако, не является единственно возможным. Ряд преимуществ, в особенности при исследовании различных общих вопросов механики, представляет описание с помощью обобщенных координат и импульсов системы. В связи с этим возникает вопрос о нахождении уравнений движения, отвечающих такой формулировке механики.

Переход от одного набора независимых переменных к другому можно совершить путем преобразования, известного в математике под названием преобразования Лежандра. В данном случае оно сводится к следующему.

Полный дифференциал функции Лагранжа как функции координат и скоростей равен

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

Это выражение можно написать в виде

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i, \tag{40,1}$$

поскольку производные $\partial L/\partial \dot{q}_i$ являются, по определению, обобщенными импульсами, а $\partial L/\partial q_i = \dot{p}_i$ в силу уравнений Лагранжа.

Переписав теперь второй член в (40,1) в виде

$$\sum p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum p_i \dot{q}_i\right) - \sum \dot{q}_i dp_i,$$

перенеся полный дифференциал $d\left(\sum p_i \dot{q}_i\right)$ в левую сторону равенства и изменив все знаки, получим из (40,1):

$$d\left(\sum p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i.$$

Величина, стоящая под знаком дифференциала представляет собой энергию системы (см. § 6); выраженная через координаты и импульсы, она называется *гамильтоновой функцией* системы

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \tag{40,2}$$

Из дифференциального равенства

$$dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i, \tag{40,3}$$

следуют уравнения

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{40,4}$$

Это — искомые уравнения движения в переменных p и q, так называемые *уравнения Гамильтона*. Они составляют систему $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка для $2s$ неизвестных функций $p(t)$ и $q(t)$, заменяющих собой s уравнений второго порядка лагранжевого метода. Ввиду их формальной простоты и симметрии эти уравнения называют также *каноническими*.

Полная производная от функции Гамильтона по времени

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i.$$

При подстановке сюда $\dot{q}_i$ и $\dot{p}_i$ из уравнений (40,4) последние два члена взаимно сокращаются, так что

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{40,5}$$

В частности, если функция Гамильтона не зависит от времени явно, то $dH/dt = 0$, т. е. мы снова приходим к закону сохранения энергии.

Наряду с динамическими переменными q, $\dot{q}$ или q, p функции Лагранжа и Гамильтона содержат различные параметры — величины, характеризующие свойства самой механической системы или действующего на нее внешнего поля. Пусть λ — такой параметр. Рассматривая его как переменную величину, будем иметь вместо (40,1):

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda,$$

после чего вместо (40,3) получим:

$$dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda.$$

Отсюда находим соотношение

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,\,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q},\,q}, \tag{40,6}$$

связывающее частные производные по параметру λ от функций Лагранжа и Гамильтона; индексы у производных указывают, что дифференцирование должно производиться в одном случае при постоянных p и q, а в другом — при постоянных q и $\dot{q}$.

Этот результат может быть представлен и в другом аспекте. Пусть функция Лагранжа имеет вид $L = L_0 + L'$, где L' представляет собой малую добавку к основной функции L_0. Тогда соответствующая добавка в функции Гамильтона $H = H_0 + H'$ связана с L' посредством

$$(H')_{p,\,q} = -(L')_{\dot{q},\,q}. \tag{40,7}$$

Заметим, что в преобразовании от (40,1) к (40,3) мы не писали члена с dt, учитывающего возможную явную зависимость функции Лагранжа от времени, поскольку последнее играло бы в данном аспекте лишь роль параметра, не имеющего отношения к производимому преобразованию. Аналогично формуле (40,6) частные производные по времени от L и от H связаны соотношением

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,\,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\dot{q},\,q}. \tag{40,8}$$

Задачи

1. Найти функцию Гамильтона для одной материальной точки в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

Ответ. В декартовых координатах x, y, z:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(x, y, z).$$

В цилиндрических координатах r, φ, z:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U(r, \varphi, z).$$

В сферических координатах r, θ, φ:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U(r, \theta, \varphi).$$

2. Найти функцию Гамильтона частицы в равномерно вращающейся системе отсчета.

Решение. Из (39,11) и (39,10) получим:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \mathbf{\Omega}[\mathbf{rp}] + U.$$

3. Найти функцию Гамильтона системы из одной частицы с массой M и n частиц с массами m, с исключенным движением центра инерции (см. задачу к § 13).

Решение Энергия E получается из найденной в задаче к § 13 функции Лагранжа изменением знака перед U. Обобщенные импульсы:

$$\mathbf{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = m\mathbf{v}_a - \frac{m^2}{\mu}\sum_a \mathbf{v}_a.$$

Отсюда имеем:

$$\sum \mathbf{p}_a = m \sum \mathbf{v}_a - \frac{nm^2}{\mu} \sum \mathbf{v}_a = \frac{mM}{\mu} \sum \mathbf{v}_a, \quad \mathbf{v}_a = \frac{\mathbf{p}_a}{m} + \frac{1}{M} \sum \mathbf{p}_a.$$

Подставляя в E, найдем:

$$H = \frac{1}{2m} \sum_a \mathbf{p}_a^2 + \frac{1}{2M} \left(\sum_a \mathbf{p}_a \right)^2 + U.$$

§ 41. Функция Рауса

В некоторых случаях может оказаться целесообразным при переходе к новым переменным заменить на импульсы не все обобщенные скорости, а только некоторые из них. Соответствующее преобразование вполне аналогично произведенному в предыдущем параграфе.

Для упрощения записи формул предположим сначала, что имеются всего две координаты, которые мы обозначим, как q и ξ, и произведем преобразование от переменных q, ξ, $\dot{q}$, $\dot{\xi}$ к переменным q, ξ, p, $\dot{\xi}$, где p — обобщенный импульс, соответствующий координате q.

Дифференциал функции Лагранжа $L(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$ равен:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi} =$$

$$= \dot{p}\, dq + p\, d\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi},$$

откуда получаем

$$d(L - p\dot{q}) = \dot{p}\, dq - \dot{q}\, dp + \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi}.$$

Введем функцию (так называемую *функцию Рауса*)

$$R(q, p, \xi, \dot{\xi}) = p\dot{q} - L, \tag{41,1}$$

в которой скорость $\dot{q}$ выражена через импульс p при помощи равенства $p = \partial L / \partial \dot{q}$. Дифференциал

$$dR = -\dot{p}\, dq + \dot{q}\, dp - \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi}. \tag{41,2}$$

Отсюда следует, что

$$\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial q}, \tag{41,3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -\frac{\partial R}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \tag{41,4}$$

Подставляя последние равенства в уравнение Лагранжа для координаты ξ, получим:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R}{\partial \xi}. \tag{41,5}$$