Отсюда имеем:

$$\sum \mathbf{p}_a = m\sum \mathbf{v}_a - \frac{nm^2}{\mu}\sum \mathbf{v}_a = \frac{mM}{\mu}\sum \mathbf{v}_a, \quad \mathbf{v}_a = \frac{\mathbf{p}_a}{m} + \frac{1}{M}\sum \mathbf{p}_a.$$

Подставляя в E, найдем:

$$H = \frac{1}{2m}\sum_a \mathbf{p}_a^2 + \frac{1}{2M}\left(\sum_a \mathbf{p}_a\right)^2 + U.$$

§ 41. Функция Рауса

В некоторых случаях может оказаться целесообразным при переходе к новым переменным заменить на импульсы не все обобщенные скорости, а только некоторые из них. Соответствующее преобразование вполне аналогично произведенному в предыдущем параграфе.

Для упрощения записи формул предположим сначала, что имеются всего две координаты, которые мы обозначим, как q и ξ, и произведем преобразование от переменных q, ξ, $\dot q$, $\dot\xi$ к переменным q, ξ, p, $\dot\xi$, где p — обобщенный импульс, соответствующий координате q.

Дифференциал функции Лагранжа $L(q, \xi, \dot q, \dot\xi)$ равен:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot q}d\dot q + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot\xi}d\dot\xi =$$

$$= \dot p\, dq + p\, d\dot q\, \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot\xi}d\dot\xi,$$

откуда получаем

$$d(L - p\dot q) = \dot p\, dq - \dot q\, dp + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot\xi}d\dot\xi.$$

Введем функцию (так называемую *функцию Рауса*)

$$R(q, p, \xi, \dot\xi) = p\dot q - L, \tag{41,1}$$

в которой скорость $\dot q$ выражена через импульс p при помощи равенства $p = \partial L/\partial \dot q$. Дифференциал

$$dR = -\dot p\, dq + \dot q\, dp - \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot\xi}d\dot\xi. \tag{41,2}$$

Отсюда следует, что

$$\dot q = \frac{\partial R}{\partial p}, \qquad \dot p = -\frac{\partial R}{\partial q}, \tag{41,3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -\frac{\partial R}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot\xi} = -\frac{\partial R}{\partial \dot\xi}. \tag{41,4}$$

Подставляя последние равенства в уравнение Лагранжа для координаты ξ, получим:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot\xi} = \frac{\partial R}{\partial \xi}. \tag{41,5}$$

Таким образом, функция Рауса является гамильтоновой по отношению к координате q (уравнения (41,3)) и лагранжевой по отношению к координате ξ (уравнение (41,5)).

Согласно общему определению энергия системы

$$E=\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}+\dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}-L=p\dot{q}+\dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}-L.$$

Ее выражение через функцию Рауса получается путем подстановки сюда (41,1) и (41,4)

$$E=R-\dot{\xi}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \tag{41,6}$$

Обобщение полученных формул на случай, когда имеется по нескольку координат q и ξ, очевидно.

Применение функции Рауса может быть целесообразным, в частности, при наличии циклических координат. Если координаты q — циклические, то они не входят явным образом в функцию Лагранжа, а потому и в функцию Рауса, так что последняя будет функцией только от p, ξ, $\dot{\xi}$. Но импульсы p, соответствующие циклическим координатам, постоянны (это следует и из второго из уравнений (41,3), которое в этом смысле не дает ничего нового). После замены импульсов p их заданными постоянными значениями уравнения (41,5)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}}=\frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial \xi}$$

превратятся в уравнения, содержащие только координаты ξ, так что циклические координаты тем самым исключаются полностью. Если эти уравнения решены и функции $\xi(t)$ найдены, то, подставив их в правую часть уравнений

$$\dot{q}=\frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial p},$$

мы найдем прямым интегрированием функции $q(t)$.

Задача

Найти функцию Рауса симметрического волчка во внешнем поле $U(\varphi,\theta)$, исключив циклическую координату ψ (ψ, φ, θ — эйлеровы углы).

Решение. Функция Лагранжа

$$L=\frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{I_3}{2}(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2-U(\varphi,\theta)$$

(ср. задачу 1 § 35). Функция Рауса

$$R=p_\psi\dot{\psi}-L=\frac{p_\psi^2}{2I_3}-p_\psi\dot{\varphi}\cos\theta-\frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+U(\varphi,\theta);$$

первый член в этом выражении представляет собой постоянную, которая может быть опущена.