§ 42. Скобки Пуассона

Пусть $f(p, q, t)$ — некоторая функция координат, импульсов и времени. Составим ее полную производную по времени

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right).$$

Подставив сюда вместо $\dot{q}_k$ и $\dot{p}_k$ их выражения из уравнений Гамильтона (40,4), получим:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\}, \tag{42,1}$$

где введено обозначение

$$\{Hf\} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right). \tag{42,2}$$

Выражение (42,2) называют *скобками Пуассона* для величин H и f.

Такие функции от динамических переменных, которые остаются постоянными при движении системы, называются, как мы знаем, интегралами движения. Мы видим из (42,1), что условие того, чтобы величина f была интегралом движения ($df/dt = 0$), можно написать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\} = 0. \tag{42,3}$$

Если же интеграл движения не зависит от времени явно, то

$$\{Hf\} = 0, \tag{42,4}$$

т. е. его скобки Пуассона с функцией Гамильтона должны обращаться в нуль.

Для любой пары величин f и g скобки Пуассона определяются аналогично (42,2):

$$\{fg\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right). \tag{42,5}$$

Скобки Пуассона обладают следующими свойствами, легко выводимыми из определения.

Если переставить функции, то скобки переменят знак; если одна из функций — постоянная (c), то скобка равна нулю:

$$\{fg\} = -\{gf\}, \tag{42,6}$$

$$\{fc\} = 0. \tag{42,7}$$

Далее,

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1 g\} + \{f_2 g\}, \tag{42,8}$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2 g\} + f_2 \{f_1 g\}. \tag{42,9}$$

Взяв частную производную от (42,5) по времени, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{fg\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} g\right\} + \left\{f \frac{\partial g}{\partial t}\right\}. \tag{42,10}$$

Если одна из функций f или g совпадает с одним из импульсов или координат, то скобки Пуассона сводятся просто к частной производной:

$$\{fq_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \tag{42,11}$$

$$\{fp_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}. \tag{42,12}$$

Формулу (42,11), например, получим, положив в (42,5) $g = q_k$; вся сумма сведется при этом к одному члену, так как $\frac{\partial q_k}{\partial q_l} = \delta_{kl}$, а $\frac{\partial q_k}{\partial p_l} = 0$. Положив в (42,11) и (42,12) функцию f равной q_i и p_i, получим, в частности,

$$\{q_i q_k\} = 0, \qquad \{p_i p_k\} = 0, \qquad \{p_i q_k\} = \delta_{ik}. \tag{42,13}$$

Между скобками Пуассона, составленными из трех функций, существует соотношение

$$\{f\{gh\}\} + \{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = 0: \tag{42,14}$$

оно называется *тождеством Якоби*.

Для его доказательства заметим следующее. Согласно определению (42,5) скобки Пуассона $\{fg\}$ являются билинейной однородной функцией производных первого порядка от величин f и g. Поэтому, например, скобка $\{h\{fg\}\}$ представляет собой линейную однородную функцию производных второго порядка от f и g. Вся же левая сторона равенства (42,14) в целом есть линейная однородная функция вторых производных от всех трех функций f, g, h. Соберем вместе члены, содержащие вторые производные от f. Первая скобка таких членов не содержит — в ней есть только первые производные от f. Сумму же второй и третьей скобок перепишем в символическом виде, введя линейные дифференциальные операторы D_1 и D_2 согласно

$$D_1(\varphi) = \{g\varphi\}, \qquad D_2(\varphi) = \{h\varphi\}.$$

Тогда

$$\{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = \{g\{hf\}\} - \{h\{gf\}\} = \\ = D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) = (D_1D_2 - D_2D_1)f.$$

Легко видеть, однако, что такая комбинация линейных дифференциальных операторов не может содержать вторых производных от f. В самом деле, общий вид линейных дифференциальных операторов есть

$$D_1=\sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad D_2=\sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

где ξ_k, η_k — произвольные функции переменных x_1, x_2, ... Тогда

$$D_1D_2=\sum_{k,\,l} \xi_k\eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_l}+\sum_{k,\,l} \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$D_2D_1=\sum_{k,\,l} \eta_k\xi_l \frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_l}+\sum_{k,\,l} \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l},$$

а разность этих произведений

$$D_1D_2-D_2D_1=\sum_{k,\,l}\left(\xi_k\frac{\partial\eta_l}{\partial x_k}-\eta_k\frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_l}$$

есть снова оператор, содержащий только однократные дифференцирования. Таким образом, в левой стороне равенства (42,14) взаимно сокращаются все члены со вторыми производными от f, а поскольку то же самое относится, очевидно, и к функциям g и h, то и все выражение тождественно обращается в нуль.

Важное свойство скобок Пуассона состоит в том, что если f и g — два интеграла движения, то составленные из них скобки тоже являются интегралом движения

$$\{fg\}=\text{const} \tag{42,15}$$

(так называемая *теорема Пуассона*).

Доказательство этой теоремы совсем просто, если f и g не зависят от времени явно. Положив в тождестве Якоби $h=H$, получим:

$$\{H\{fg\}\}+\{f\{gH\}\}+\{g\{Hf\}\}=0.$$

Отсюда видно, что если $\{Hg\}=0$ и $\{Hf\}=0$, то и $\{H\{fg\}\}=0$, что и следовало доказать.

Если же интегралы движения f и g зависят явно от времени, то пишем на основании (42,1):

$$\frac{d}{dt}\{fg\}=\frac{\partial}{\partial t}\{fg\}+\{H\{fg\}\}.$$

Воспользовавшись формулой (42,10) и заменив скобку $\{H\{fg\}\}$ двумя другими при помощи тождества Якоби, получим:

$$\frac{d}{dt}\{fg\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}g\right\}+\left\{f\frac{\partial g}{\partial t}\right\}-\{f\{gH\}\}-\{g\{Hf\}\}=$$

$$=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}+\{Hf\},\ g\right\}+\left\{f,\ \frac{\partial g}{\partial t}+\{Hg\}\right\}$$

или

$$\frac{d}{dt}\{fg\}=\left\{\frac{df}{dt}g\right\}+\left\{f\frac{dg}{dt}\right\}, \qquad (42,16)$$

откуда очевидно доказательство теоремы Пуассона в общем случае.

Разумеется, применяя теорему Пуассона, мы не всегда будем получать новые интегралы движения, так как их число вообще ограничено ($2s-1$, где s — число степеней свободы). В некоторых случаях мы можем получить тривиальный результат — скобки Пуассона сведутся к постоянной. В других случаях вновь полученный интеграл может оказаться просто функцией исходных интегралов f и g. Если же не имеет места ни тот, ни другой случай, то скобки Пуассона дают новый интеграл движения.

Задачи

1. Определить скобки Пуассона, составленные из декартовых компонент импульса $\mathbf{p}$ и момента импульса $\mathbf{M}=[\mathbf{rp}]$ материальной частицы.

Решение. С помощью формулы (42,12) находим:

$$\{M_x p_y\}=-\frac{\partial M_x}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}(yp_z-zp_y)=-p_z$$

и аналогичным образом еще две формулы

$$\{M_x p_x\}=0, \quad \{M_x p_z\}=p_y.$$

Остальные скобки получаются отсюда циклической перестановкой индексов x, y, z.

2. Определить скобки Пуассона, составленные из компонент $\mathbf{M}$.

Решение. Прямое вычисление по формуле (42,5) дает:

$$\{M_x M_y\}=-M_z, \quad \{M_y M_z\}=-M_x, \quad \{M_z M_x\}=-M_y.$$

Поскольку импульсы и координаты различных частиц являются не зависимыми друг от друга переменными, то легко видеть, что полученные в задачах 1 и 2 формулы справедливы и для полных импульса и момента любой системы частиц.

3. Показать, что

$$\{\varphi M_z\}=0,$$

где φ — любая скалярная функция координат и импульса частицы.

Решение. Скалярная функция может зависеть от компонент векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ только в комбинациях $\mathbf{r}^2$, $\mathbf{p}^2$, $\mathbf{rp}$. Поэтому

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}}=\frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}^2)}2\mathbf{r}+\frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{pr})}\mathbf{p}$$

и аналогично для $\partial\varphi/\partial\mathbf{p}$. Искомое соотношение проверяется прямым вычислением по формуле (42,5) с учетом указанных правил дифференцирования.

4. Показать, что

$$\{\mathbf{f}M_z\}=[\mathbf{fn}],$$

где $\mathbf{f}$ — векторная функция координат и импульса частицы, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении оси z.

Решение. Произвольный вектор $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ может быть написан в виде $\mathbf{f} = \mathbf{r}\varphi_1 + \mathbf{p}\varphi_2 + [\mathbf{r}\mathbf{p}]\varphi_3$, где φ_1, φ_2, φ_3 — скалярные функции. Искомое соотношение проверяется прямым вычислением с помощью формул (42,9), (42,11). (42,12) и формулы, указанной в задаче 3.

§ 43. Действие как функция координат

При формулировке принципа наименьшего действия мы рассматривали интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt, \tag{43,1}$$

взятый по траектории между двумя заданными положениями $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$, которые система занимает в заданные моменты времени t_1 и t_2. При варьировании же действия сравнивались значения этого интеграла для близких траекторий с одними и теми же значениями $q(t_1)$ и $q(t_2)$. Лишь одна из этих траекторий отвечает действительному движению — та, для которой интеграл S минимален.

Рассмотрим теперь понятие действия в другом аспекте. Именно, будем рассматривать S как величину, характеризующую движение по истинным траекториям, и сравним значения, которые она имеет для траекторий, имеющих общее начало $q(t_1) = q^{(1)}$, но проходящих в момент t_2 через различные положения. Другими словами, будем рассматривать интеграл действия для истинных траекторий как функцию значений координат в верхнем пределе интегрирования.

Изменение действия при переходе от одной траектории к близкой к ней другой траектории дается (при одной степени свободы) выражением (2,5)

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q \Big|_{t_1}^{t} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\,dt.$$

Поскольку траектории действительного движения удовлетворяют уравнениям Лагранжа, то стоящий здесь интеграл обращается в нуль. В первом же члене полагаем на нижнем пределе $\delta q(t_1) = 0$, а значение $\delta q(t_2)$ обозначим просто, как δq. Заменив также $\partial L/\partial \dot q$ на p, получим окончательно: $\delta S = p\delta q$ или в общем случае любого числа степеней свободы

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i. \tag{43,2}$$

Из этого соотношения следует, что частные производные от действия по координатам равны соответствующим импульсам

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \tag{43,3}$$