Решение. Произвольный вектор $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ может быть написан в виде $\mathbf{f} = \mathbf{r}\varphi_1 + \mathbf{p}\varphi_2 + [\mathbf{rp}]\varphi_3$, где φ_1, φ_2, φ_3 — скалярные функции. Искомое соотношение проверяется прямым вычислением с помощью формул (42,9), (42,11). (42,12) и формулы, указанной в задаче 3.

§ 43. Действие как функция координат

При формулировке принципа наименьшего действия мы рассматривали интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt, \tag{43,1}$$

взятый по траектории между двумя заданными положениями $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$, которые система занимает в заданные моменты времени t_1 и t_2. При варьировании же действия сравнивались значения этого интеграла для близких траекторий с одними и теми же значениями $q(t_1)$ и $q(t_2)$. Лишь одна из этих траекторий отвечает действительному движению — та, для которой интеграл S минимален.

Рассмотрим теперь понятие действия в другом аспекте. Именно, будем рассматривать S как величину, характеризующую движение по истинным траекториям, и сравним значения, которые она имеет для траекторий, имеющих общее начало $q(t_1) = q^{(1)}$, но проходящих в момент t_2 через различные положения. Другими словами, будем рассматривать интеграл действия для истинных траекторий как функцию значений координат в верхнем пределе интегрирования.

Изменение действия при переходе от одной траектории к близкой к ней другой траектории дается (при одной степени свободы) выражением (2,5)

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\delta q \,\Big|_{t_1}^{t} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\,dt.$$

Поскольку траектории действительного движения удовлетворяют уравнениям Лагранжа, то стоящий здесь интеграл обращается в нуль. В первом же члене полагаем на нижнем пределе $\delta q(t_1) = 0$, а значение $\delta q(t_2)$ обозначим просто, как δq. Заменив также $\partial L/\partial \dot q$ на p, получим окончательно: $\delta S = p\,\delta q$ или в общем случае любого числа степеней свободы

$$\delta S = \sum_i p_i\,\delta q_i. \tag{43,2}$$

Из этого соотношения следует, что частные производные от действия по координатам равны соответствующим импульсам

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \tag{43,3}$$

Аналогичным образом действие можно понимать как явную функцию времени, рассматривая траектории, начинающиеся в заданный момент времени t_1 в заданном положении $q^{(1)}$, но заканчивающиеся в заданном положении $q^{(2)}$ в различные моменты времени $t_2 = t$. Понимаемую в этом смысле частную производную $\partial S/\partial t$ можно найти путем соответствующего варьирования интеграла. Проще, однако, воспользоваться уже известной нам формулой (43,3), поступив следующим образом.

По самому определению действия его полная производная по времени вдоль траектории равна:

$$\frac{dS}{dt} = L. \tag{43,4}$$

С другой стороны, рассматривая S как функцию координат и времени в описанном выше смысле и используя формулу (43,3), имеем:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

Сравнивая оба выражения, находим:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i$$

или окончательно:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \tag{43,5}$$

Формулы (43,3) и (43,5) вместе можно записать в виде выражения

$$dS = \sum_i p_i\, dq_i - H\, dt \tag{43,6}$$

для полного дифференциала действия как функции координат и времени в верхнем пределе интегрирования в (43,1). Предположим теперь, что изменяются координаты (и время) не только конца, но и начала движения. Очевидно, что соответствующее изменение S будет даваться разностью выражений (43,6) на обоих концах, т. е.

$$dS = \sum p_i^{(2)}\, dq_i^{(2)} - H^{(2)}\, dt^{(2)} - \sum p_i^{(1)}\, dq_i^{(1)} + H^{(1)}\, dt^{(1)}. \tag{43,7}$$

Это соотношение уже само по себе показывает, что, каково бы ни было внешнее воздействие на систему во время движения, ее конечное состояние не может быть произвольной функцией начального, — возможны только такие движения, при которых выражение в правой стороне равенства (43,7) является полным дифференциалом. Таким образом, уже самый факт существования принципа наименьшего действия, независимо от конкретного вида функции Лагранжа, накладывает на совокупность возможных движений определенные ограничения. В частности, оказывается возможным установить ряд общих закономерностей (не зависящих от вида имеющихся внешних полей) для пучков частиц, разлетающихся из заданных точек пространства. Изучение этих закономерностей составляет предмет так называемой *геометрической оптики*[1]).

Интересно отметить, что уравнения Гамильтона могут быть выведены формальным образом из условия минимальности действия, если написать последнее, на основании (43,6), в виде интеграла

$$S=\int\left(\sum_i p_i\,dq_i - H\,dt\right) \tag{43,8}$$

и рассматривать координаты и импульсы как независимо варьируемые величины. Предполагая снова для краткости, что имеется всего одна координата (и один импульс), пишем вариацию действия

$$\delta S=\int\left\{\delta p\,dq + p\,d\,\delta q - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q\,dt - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p\,dt\right\}.$$

Преобразование второго члена (интегрирование по частям) дает:

$$\delta S=\int \delta p\left(dq-\frac{\partial H}{\partial p}\,dt\right) + p\,\delta q\,\Big| - \int \delta q\left(dp+\frac{\partial H}{\partial q}\,dt\right).$$

На границах интегрирования мы должны положить $\delta q=0$, так что проинтегрированный член выпадает. Остающееся же выражение может быть равным нулю при произвольных независимых δp и δq лишь при условии обращения в нуль подынтегральных выражений в каждом из двух интегралов:

$$dq=\frac{\partial H}{\partial p}\,dt, \qquad dp=-\frac{\partial H}{\partial q}\,dt,$$

т. е. мы получаем после деления на dt уравнения Гамильтона.

§ 44. Принцип Мопертюи

Принципом наименьшего действия движение механической системы определяется полностью: путем решения следующих из этого принципа уравнений движения можно найти как форму траектории, так и зависимость положения на траектории от времени.

Если ограничиться более узким вопросом об определении лишь самой траектории (оставляя в стороне временну́ю часть

[1]) См. «Теория поля», 7-е изд., гл. VII.