конкретного вида функции Лагранжа, накладывает на совокупность возможных движений определенные ограничения. В частности, оказывается возможным установить ряд общих закономерностей (не зависящих от вида имеющихся внешних полей) для пучков частиц, разлетающихся из заданных точек пространства. Изучение этих закономерностей составляет предмет так называемой *геометрической оптики*[1]).

Интересно отметить, что уравнения Гамильтона могут быть выведены формальным образом из условия минимальности действия, если написать последнее, на основании (43,6), в виде интеграла

$$S = \int \Big(\sum_i p_i\, dq_i - H\, dt \Big) \tag{43,8}$$

и рассматривать координаты и импульсы как независимо варьируемые величины. Предполагая снова для краткости, что имеется всего одна координата (и один импульс), пишем вариацию действия

$$\delta S = \int \left\{ \delta p\, dq + p d\, \delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q\, dt - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p\, dt \right\}.$$

Преобразование второго члена (интегрирование по частям) дает:

$$\delta S = \int \delta p \left(dq - \frac{\partial H}{\partial p}\, dt \right) + p\, \delta q \Big| - \int \delta q \left(dp + \frac{\partial H}{\partial q}\, dt \right).$$

На границах интегрирования мы должны положить $\delta q = 0$, так что проинтегрированный член выпадает. Остающееся же выражение может быть равным нулю при произвольных независимых δp и δq лишь при условии обращения в нуль подынтегральных выражений в каждом из двух интегралов:

$$dq = \frac{\partial H}{\partial p}\, dt, \qquad dp = -\frac{\partial H}{\partial q}\, dt,$$

т. е. мы получаем после деления на dt уравнения Гамильтона.

§ 44. Принцип Мопертюи

Принципом наименьшего действия движение механической системы определяется полностью: путем решения следующих из этого принципа уравнений движения можно найти как форму траектории, так и зависимость положения на траектории от времени.

Если ограничиться более узким вопросом об определении лишь самой траектории (оставляя в стороне временну́ю часть

[1]) См. «Теория поля», 7-е изд., гл. VII.

задачи), то оказывается возможным установить для этой цели упрощенную форму принципа наименьшего действия.

Предположим, что функция Лагранжа, а с нею и функция Гамильтона не содержат времени явно, так что энергия системы сохраняется:

$$H(p, q) = E = \text{const}.$$

Согласно принципу наименьшего действия, вариация действия для заданных начальных и конечных значений координат и моментов времени (скажем, t_0 и t) равна нулю. Если же допускать варьирование конечного момента времени t при фиксированных по-прежнему начальных и конечных координатах, то имеем (ср. (43,7)):

$$\delta S = -H\,\delta t. \tag{44,1}$$

Будем теперь сравнивать не все виртуальные движения системы, а лишь те, которые удовлетворяют закону сохранения энергии. Для таких траекторий мы можем заменить H в (44,1) постоянной E, что дает

$$\delta S + E\,\delta t = 0. \tag{44,2}$$

Написав действие в виде (43,8) и снова заменяя H на E, имеем:

$$S = \int \sum_i p_i\,dq_i - E(t - t_0). \tag{44,3}$$

Первый член в этом выражении

$$S_0 = \int \sum_i p_i\,dq_i \tag{44,4}$$

иногда называют *укороченным действием*. Подставив (44,3) в (44,2), найдем:

$$\delta S_0 = 0. \tag{44,5}$$

Таким образом, укороченное действие имеет минимум по отношению ко всем траекториям, удовлетворяющим закону сохранения энергии и проходящим через конечную точку в произвольный момент времени. Для того чтобы пользоваться таким вариационным принципом, необходимо предварительно выразить импульсы, а с ними и все подынтегральное выражение в (44,4) через координаты q и их дифференциалы dq. Для этого надо воспользоваться равенствами

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot q_i} L\left(q, \frac{dq}{dt}\right), \tag{44,6}$$

представляющими собой определение импульсов, и уравнением закона сохранения энергии

$$E\left(q, \frac{dq}{dt}\right) = E. \tag{44,7}$$

Выразив из последнего уравнения дифференциал dt через координаты q и их дифференциалы dq и подставив в формулы (44,6), мы выразим импульсы через q и dq, причем энергия E будет играть роль параметра. Получающийся таким образом вариационный принцип определяет траекторию системы; этот принцип называют обычно *принципом Мопертюи* (хотя его точная формулировка была дана Эйлером и Лагранжем).

Произведем указанные действия в явном виде для обычной формы функции Лагранжа (5,5) как разности кинетической и потенциальной энергий:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i, k} a_{ik}(q)\,\dot{q}_i\dot{q}_k - U(q).$$

При этом импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k a_{ik}(q)\,\dot{q}_k,$$

а энергия

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i, k} a_{ik}(q)\,\dot{q}_i\dot{q}_k + U(q).$$

Из последнего равенства имеем

$$dt = \sqrt{\sum a_{ik}\,dq_i\,dq_k/2(E-U)} \tag{44,8}$$

и, подставляя это выражение в

$$\sum_i p_i\,dq_i = \sum_{i, k} a_{ik}\frac{dq_k}{dt}\,dq_i,$$

найдем укороченное действие в виде

$$S_0 = \int \sqrt{2(E-U)\sum_{i, k} a_{ik}\,dq_i\,dq_k}\,. \tag{44,9}$$

В частности, для одной материальной точки кинетическая энергия

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2$$

(где m — масса частицы, а dl — элемент длины траектории) и вариационный принцип для определения формы траектории

$$\delta\int \sqrt{2m(E-U)}\,dl = 0, \tag{44,10}$$

где интеграл берется между двумя заданными точками пространства. В таком виде он был представлен Якоби.

При свободном движении частицы $U=0$, и (44,10) дает тривиальный результат

$$\delta\int dl=0,$$

т. е. частица движется по кратчайшему пути — по прямой.

Вернемся снова к выражению для действия (44,3) и произведем на этот раз его варьирование также и по параметру E:

$$\delta S=\frac{\partial S_0}{\partial E}\delta E-(t-t_0)\,\delta E-E\,\delta t.$$

Подставив это в (44,2), находим:

$$\frac{\partial S_0}{\partial E}=t-t_0. \qquad (44,11)$$

Для укороченного действия в форме (44,9) это равенство приводит к соотношению

$$\int\sqrt{\sum a_{ik}\,dq_i\,dq_k/2\,(E-U)}=t-t_0, \qquad (44,12)$$

которое представляет собой не что иное, как интеграл уравнения (44,8). Вместе с уравнением траектории оно полностью определяет движение.

Задача

Из вариационного принципа (44,10) получить дифференциальное уравнение траектории.

Решение. Производя варьирование, имеем:

$$\delta\int\sqrt{E-U}\,dl=-\int\left\{\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\frac{\delta\mathbf{r}}{2\sqrt{E-U}}\,dl-\sqrt{E-U}\,\frac{d\mathbf{r}}{dl}\,d\,\delta\mathbf{r}\right\}.$$

Во втором члене учтено, что $dl^2=d\mathbf{r}^2$ и потому $dl\,d\delta l=d\mathbf{r}\,d\delta\mathbf{r}$; произведя в этом члене интегрирование по частям и приравняв затем нулю коэффициент при $\delta\mathbf{r}$ в подынтегральном выражении, получим дифференциальное уравнение траектории

$$2\sqrt{E-U}\,\frac{d}{dl}\left(\sqrt{E-U}\,\frac{d\mathbf{r}}{dl}\right)=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

Раскрыв производную в левой стороне равенства и вводя силу $\mathbf{F}=-\partial U/\partial\mathbf{r}$, можно представить это уравнение в виде

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}=\frac{\mathbf{F}-(\mathbf{F}\mathbf{t})\,\mathbf{t}}{2\,(E-U)},$$

где $\mathbf{t}=d\mathbf{r}/dl$ — единичный вектор касательной к траектории. Разность $\mathbf{F}-(\mathbf{F}\mathbf{t})\mathbf{t}$ есть нормальная к траектории компонента силы $\mathbf{F}_n$. Производная же $d^2\mathbf{r}/dl^2=d\mathbf{t}/dl$, как известно из дифференциальной геометрии, равна $\mathbf{n}/R$, где R — радиус кривизны траектории, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор главной нормали к ней. Заменив также $E - U$ на $mv^2/2$, получим:

$$\mathbf{n}\frac{mv^2}{R} = \mathbf{F}_n$$

в соответствии с известным выражением для нормального ускорения при движении по искривленной траектории.

§ 45. Канонические преобразования

Выбор обобщенных координат q не ограничен никакими условиями — ими могут быть любые s величин, однозначно определяющие положение системы в пространстве. Формальный вид уравнений Лагранжа (2,6) не зависит от этого выбора, и в этом смысле можно сказать, что уравнения Лагранжа инвариантны по отношению к преобразованию от координат q_1, q_2, ... к любым другим независимым величинам Q_1, Q_2, ... Новые координаты Q являются функциями старых координат q, причем допустим и такой их выбор, при котором эта связь содержит в явном виде также и время, т. е. речь идет о преобразованиях вида

$$Q_i = Q_i(q, t) \tag{45,1}$$

(их называют иногда *точечными преобразованиями*).

Наряду с уравнениями Лагранжа при преобразовании (45,1) сохраняют, разумеется, свою форму (40,4) и уравнения Гамильтона. Последние, однако, допускают в действительности гораздо более широкий класс преобразований. Это обстоятельство естественным образом связано с тем, что в гамильтоновом методе импульсы p играют наряду с координатами q роль равноправных независимых переменных. Поэтому понятие преобразования может быть расширено так, чтобы включить в себя преобразование всех $2s$ независимых переменных p и q к новым переменным P и Q по формулам

$$Q_i = Q_i(p, q, t), \quad P_i = P_i(p, q, t). \tag{45,2}$$

Такое расширение класса допустимых преобразований является одним из существенных преимуществ гамильтонового метода механики.

Однако отнюдь не при произвольных преобразованиях вида (45,2) уравнения движения сохраняют свой канонический вид. Выведем теперь условия, которым должно удовлетворять преобразование, для того чтобы уравнения движения в новых переменных P, Q имели вид

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \tag{45,3}$$

с некоторой новой функцией Гамильтона $H'(P, Q)$. Среди таких преобразований особенно важны так называемые *канонические*.