нормали к ней. Заменив также $E-U$ на $mv^2/2$, получим:

$$\mathbf{n}\frac{mv^2}{R}=\mathbf{F}_n$$

в соответствии с известным выражением для нормального ускорения при движении по искривленной траектории.

§ 45. Канонические преобразования

Выбор обобщенных координат q не ограничен никакими условиями — ими могут быть любые s величин, однозначно определяющие положение системы в пространстве. Формальный вид уравнений Лагранжа (2,6) не зависит от этого выбора, и в этом смысле можно сказать, что уравнения Лагранжа инвариантны по отношению к преобразованию от координат q_1, q_2, ... к любым другим независимым величинам Q_1, Q_2, ... Новые координаты Q являются функциями старых координат q, причем допустим и такой их выбор, при котором эта связь содержит в явном виде также и время, т. е. речь идет о преобразованиях вида

$$Q_i=Q_i(q,\ t) \tag{45,1}$$

(их называют иногда *точечными преобразованиями*).

Наряду с уравнениями Лагранжа при преобразовании (45,1) сохраняют, разумеется, свою форму (40,4) и уравнения Гамильтона. Последние, однако, допускают в действительности гораздо более широкий класс преобразований. Это обстоятельство естественным образом связано с тем, что в гамильтоновом методе импульсы p играют наряду с координатами q роль равноправных независимых переменных. Поэтому понятие преобразования может быть расширено так, чтобы включить в себя преобразование всех $2s$ независимых переменных p и q к новым переменным P и Q по формулам

$$Q_i=Q_i(p,\ q,\ t),\qquad P_i=P_i(p,\ q,\ t). \tag{45,2}$$

Такое расширение класса допустимых преобразований является одним из существенных преимуществ гамильтонового метода механики.

Однако отнюдь не при произвольных преобразованиях вида (45,2) уравнения движения сохраняют свой канонический вид. Выведем теперь условия, которым должно удовлетворять преобразование, для того чтобы уравнения движения в новых переменных P, Q имели вид

$$\dot{Q}_i=\frac{\partial H'}{\partial P_i},\qquad \dot{P}_i=-\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \tag{45,3}$$

с некоторой новой функцией Гамильтона $H'(P,Q)$. Среди таких преобразований особенно важны так называемые *канонические*.

К формулам для канонических преобразований можно прийти следующим путем. В конце § 43 было показано, что уравнения Гамильтона могут быть получены из принципа наименьшего действия, представленного в форме

$$\delta \int \left(\sum_i p_i \, dq_i - H \, dt \right) = 0 \tag{45,4}$$

(причем варьируются независимо все координаты и импульсы). Для того чтобы новые переменные P и Q тоже удовлетворяли уравнениям Гамильтона, для них тоже должен быть справедлив принцип наименьшего действия

$$\delta \int \left(\sum_i P_i \, dQ_i - H' \, dt \right) = 0. \tag{45,5}$$

Но два принципа (45,4) и (45,5) заведомо эквивалентны друг другу при условии, что их подынтегральные выражения отличаются лишь на полный дифференциал произвольной функции F координат, импульсов и времени; тогда разность между обоими интегралами будет несущественной при варьировании постоянной (разность значений F на пределах интегрирования). Таким образом, положим

$$\sum p_i \, dq_i - H \, dt = \sum P_i \, dQ_i - H' \, dt + dF.$$

Преобразования, удовлетворяющие такому требованию, и называют каноническими[1]). Всякое каноническое преобразование характеризуется своей функцией F, которую называют *производящей функцией* преобразования.

Переписав полученное соотношение в виде

$$dF = \sum p_i \, dq_i - \sum P_i \, dQ_i + (H' - H) \, dt, \tag{45,6}$$

мы видим, что

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}; \tag{45,7}$$

при этом предполагается, что производящая функция задана как функция старых и новых координат (и времени): $F = F(q, Q, t)$. При заданной функции F формулы (45,7) устанавливают связь между старыми (p, q) и новыми (P, Q) переменными, а также дают выражение для новой гамильтоновой функции.

---

[1]) Заметим, что, кроме канонических преобразований, сохраняют канонический вид уравнений движения и преобразования, при которых подынтегральные выражения в (45,4) и (45,5) отличаются постоянным множителем. Примером может служить преобразование вида $P_i = ap_i$, $Q_i = q_i$, $H' = aH$ с произвольной постоянной a.

Может оказаться удобным выражать производящую функцию не через переменные q и Q, а через старые координаты q и новые импульсы P. Для вывода формул канонических преобразований в этом случае надо произвести в соотношении (45,6) соответствующее преобразование Лежандра. Именно, переписываем его в виде

$$d\left(F + \sum P_i Q_i\right) = \sum p_i\, dq_i + \sum Q_i\, dP_i + (H' - H)\, dt.$$

Выражение, стоящее под знаком дифференциала в левой стороне равенства, выраженное через переменные q, P, и является новой производящей функцией. Обозначив ее посредством $\Phi(q, P, t)$, имеем[1]:

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{45,8}$$

Аналогичным образом можно перейти к формулам канонических преобразований, выраженных через производящие функции, зависящие от переменных p и Q или p и P.

Отметим, что связь между новой и старой гамильтоновыми функциями всегда выражается одинаковым образом: разность $H' - H$ дается частной производной по времени от производящей функции. В частности, если последняя не зависит от времени, то $H' = H$. Другими словами, в этом случае для получения новой функции Гамильтона достаточно подставить в H величины p, q, выраженные через новые переменные P, Q.

Широта канонических преобразований в значительной степени лишает в гамильтоновом методе понятие обобщенных координат и импульсов их первоначального смысла. Поскольку преобразования (45,2) связывают каждую из величин P, Q как с координатами q, так и с импульсами p, то переменные Q уже не имеют смысла чисто пространственных координат. Различие между обеими группами переменных становится в основном вопросом номенклатурным. Это обстоятельство весьма наглядно проявляется, например, в преобразовании $Q_i = p_i$, $P_i = -q_i$[2], явно не меняющем канонический вид уравнений и сводящемся просто ко взаимному переименованию координат и импульсов.

[1]) Заметим, что, взяв производящую функцию в виде

$$\Phi = \sum_i f_i(q, t)\, P_i$$

(где f_i — произвольные функции), мы получим преобразование, при котором новые координаты $Q_i = f_i(q, t)$, т. е. выражаются только через старые координаты (но не импульсы). Это — точечные преобразования, которые естественным образом оказываются частным случаем канонических преобразований.

[2]) Ему отвечает производящая функция $F = \sum q_i Q_i$.

Ввиду этой условности терминологии переменные p и q в гамильтоновом методе часто называют просто *канонически сопряженными величинами*.

Условие канонической сопряженности можно выразить с помощью скобок Пуассона. Для этого докажем предварительно общую теорему об инвариантности скобок Пуассона по отношению к каноническим преобразованиям.

Пусть $\{fg\}_{p,q}$ — скобка Пуассона величин f и g, в которой дифференцирование производится по переменным p, q, а $\{fg\}_{P,Q}$ — скобка Пуассона тех же величин, дифференцируемых по каноническим переменным P, Q. Тогда

$$\{fg\}_{p,q}=\{fg\}_{P,Q}. \tag{45,9}$$

В справедливости этого соотношения можно убедиться прямым вычислением с использованием формул канонического преобразования. Можно, однако, обойтись и без вычислений с помощью следующего рассуждения.

Прежде всего замечаем, что в канонических преобразованиях (45,7) или (45,8) время играет роль параметра. Поэтому, если мы докажем теорему (45,9) для величин, не зависящих явно от времени, то она будет верна и в общем случае. Рассмотрим теперь чисто формальным образом величину g как гамильтонову функцию некоторой фиктивной системы. Тогда согласно формуле (42,1) $\{fg\}_{p,q}=-df/dt$. Но производная df/dt есть величина, которая может зависеть лишь от свойств движения (нашей фиктивной системы) как такового, а не от того или иного выбора переменных. Поэтому и скобка Пуассона $\{fg\}$ не может измениться при переходе от одних канонических переменных к другим.

Из формул (42,13) и теоремы (45,9) получим:

$$\{Q_iQ_k\}_{p,q}=0, \qquad \{P_iP_k\}_{p,q}=0, \qquad \{P_iQ_k\}_{p,q}=\delta_{ik}. \tag{45,10}$$

Это — записанные с помощью скобок Пуассона условия, которым должны удовлетворять новые переменные, для того чтобы преобразование $p, q\rightarrow P, Q$ было каноническим.

Интересно отметить, что изменение величин p, q при самом движении можно рассматривать как канонические преобразования. Смысл этого утверждения состоит в следующем. Пусть q_t, p_t — значения канонических переменных в момент времени t, а $q_{t+\tau}$, $p_{t+\tau}$ — их значения в другой момент $t+\tau$. Последние являются некоторыми функциями от первых (и от величины интервала τ как от параметра):

$$q_{t+\tau}=q(q_t, p_t, t, \tau), \qquad p_{t+\tau}=p(q_t, p_t, t, \tau).$$

Если рассматривать эти формулы как преобразование от переменных q_t, p_t к переменным $q_{t+\tau}$, $p_{t+\tau}$, то это преобразование будет каноническим. Это очевидно из выражения

$$dS = \sum (p_{t+\tau} dq_{t+\tau} - p_t dq_t) - (H_{t+\tau} - H_t)\, dt$$

для дифференциала действия $S(q_{t+\tau}, q_t, t)$, взятого вдоль истинной траектории, проходящей через точки q_t и $q_{t+\tau}$ в моменты времени t и $t+\tau$ при заданном τ (ср. (43,7)). Сравнение этой формулы с (45,6) показывает, что $-S$ есть производящая функция преобразования.

§ 46. Теорема Лиувилля

Для геометрической интерпретации механических явлений часто пользуются понятием о так называемом *фазовом пространстве* как о пространстве $2s$ измерений, на координатных осях которого откладываются значения s обобщенных координат и s импульсов данной механической системы. Каждая точка этого пространства отвечает определенному состоянию системы. При движении системы изображающая ее фазовая точка описывает в фазовом пространстве соответствующую линию, называемую фазовой траекторией. Произведение дифференциалов

$$d\Gamma = dq_1 \ldots dq_s \, dp_1 \ldots dp_s$$

можно рассматривать как «элемент объема» фазового пространства. Рассмотрим теперь интеграл $\int d\Gamma$, взятый по некоторой области фазового пространства и изображающий собой ее объем. Покажем, что эта величина обладает свойством инвариантности по отношению к каноническим преобразованиям: если произвести каноническое преобразование от переменных p, q к переменным P, Q, то объемы соответствующих друг другу областей пространств p, q и P, Q одинаковы:

$$\int \ldots \int dq_1 \ldots dq_s \, dp_1 \ldots dp_s = \int \ldots \int dQ_1 \ldots dQ_s \, dP_1 \ldots dP_s. \tag{46,1}$$

Как известно, преобразование переменных в кратном интеграле производится по формуле

$$\int \ldots \int dQ_1 \ldots dQ_s \, dP_1 \ldots dP_s = \int \ldots \int D \, dq_1 \ldots dq_s dp_1 \ldots dp_s,$$

где

$$D = \frac{\partial (Q_1, \ldots, Q_s, P_1, \ldots, P_s)}{\partial (q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)} \tag{46,2}$$

есть так называемый якобиан преобразования. Поэтому доказательство теоремы (46,1) сводится к доказательству того, что