будет каноническим. Это очевидно из выражения

$$dS = \sum (p_{t+\tau}\, dq_{t+\tau} - p_t\, dq_t) - (H_{t+\tau} - H_t)\, dt$$

для дифференциала действия $S(q_{t+\tau}, q_t, t)$, взятого вдоль истинной траектории, проходящей через точки q_t и $q_{t+\tau}$ в моменты времени t и $t+\tau$ при заданном τ (ср. (43,7)). Сравнение этой формулы с (45,6) показывает, что $-S$ есть производящая функция преобразования.

§ 46. Теорема Лиувилля

Для геометрической интерпретации механических явлений часто пользуются понятием о так называемом *фазовом пространстве* как о пространстве $2s$ измерений, на координатных осях которого откладываются значения s обобщенных координат и s импульсов данной механической системы. Каждая точка этого пространства отвечает определенному состоянию системы. При движении системы изображающая ее фазовая точка описывает в фазовом пространстве соответствующую линию, называемую фазовой траекторией. Произведение дифференциалов

$$d\Gamma = dq_1 \ldots dq_s\, dp_1 \ldots dp_s$$

можно рассматривать как «элемент объема» фазового пространства. Рассмотрим теперь интеграл $\int d\Gamma$, взятый по некоторой области фазового пространства и изображающий собой ее объем. Покажем, что эта величина обладает свойством инвариантности по отношению к каноническим преобразованиям: если произвести каноническое преобразование от переменных p, q к переменным P, Q, то объемы соответствующих друг другу областей пространств p, q и P, Q одинаковы:

$$\int \ldots \int dq_1 \ldots dq_s\, dp_1 \ldots dp_s = \int \ldots \int dQ_1 \ldots dQ_s\, dP_1 \ldots dP_s. \tag{46,1}$$

Как известно, преобразование переменных в кратном интеграле производится по формуле

$$\int \ldots \int dQ_1 \ldots dQ_s\, dP_1 \ldots dP_s = \int \ldots \int D\, dq_1 \ldots dq_s dp_1 \ldots dp_s,$$

где

$$D = \frac{\partial (Q_1, \ldots, Q_s, P_1, \ldots, P_s)}{\partial (q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)} \tag{46,2}$$

есть так называемый якобиан преобразования. Поэтому доказательство теоремы (46,1) сводится к доказательству того, что якобиан всякого канонического преобразования равен единице:

$$D = 1. \tag{46,3}$$

Воспользуемся известным свойством якобианов, которое позволяет обращаться с ними в определенном смысле, как с дробями. «Разделив числитель и знаменатель» якобиана на $\partial(q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s)$, получим:

$$D = \frac{\partial(Q_1, \ldots, Q_s, P_1, \ldots, P_s)}{\partial(q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s)} \Big/ \frac{\partial(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)}{\partial(q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s)}.$$

Согласно другому известному правилу якобиан, у которого в «числителе» и «знаменателе» фигурируют одинаковые величины, сводится к якобиану от меньшего числа переменных, причем при всех дифференцированиях в нем выпавшие одинаковые величины должны считаться постоянными. Поэтому

$$D = \left\{ \frac{\partial(Q_1, \ldots, Q_s)}{\partial(q_1, \ldots, q_s)} \right\}_{P=\text{const}} \Big/ \left\{ \frac{\partial(p_1, \ldots, p_s)}{\partial(P_1, \ldots, P_s)} \right\}_{q=\text{const}}. \tag{46,4}$$

Рассмотрим якобиан, стоящий в числителе этого выражения. Согласно определению это есть определитель ранга s, составленный из элементов $\partial Q_i/\partial q_k$ (элемент на пересечении i-й строки и k-го столбца). Представив каноническое преобразование с помощью производящей функции $\Phi(q, P)$ в форме (45,8), получим:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_k \, \partial P_i}.$$

Таким же образом найдем, что i, k-й элемент определителя в знаменателе выражения (46,4) равен $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \, \partial P_k}$. Это значит, что оба определителя отличаются только заменой строк на столбцы и обратно. Поэтому они равны друг другу, так что отношение (46,4) равно единице, что и требовалось доказать.

Представим себе теперь, что каждая точка данного участка фазового пространства перемещается со временем согласно уравнениям движения рассматриваемой механической системы. Тем самым будет перемещаться и весь участок. При этом его объем остается неизменным:

$$\int d\Gamma = \text{const}. \tag{46,5}$$

Это утверждение (так называемая *теорема Лиувилля*) непосредственно следует из инвариантности фазового объема при канонических преобразованиях и из того, что самое изменение p и q при движении можно рассматривать (как было указано в конце предыдущего параграфа) как каноническое преобразование.

Совершенно аналогичным образом можно доказать инвариантность интегралов

$$\iint \sum_i dq_i\, dp_i,$$

$$\iiiint \sum_{i \neq k} dq_i\, dp_i\, dq_k\, dp_k,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

в которых интегрирование производится по заданным двух-, четырех- и т. д. -мерным многообразиям в фазовом пространстве.

§ 47. Уравнение Гамильтона — Якоби

В § 43 было введено понятие о действии как функции координат и времени. Было показано, что частная производная по времени от этой функции $S(q, t)$ связана с функцией Гамильтона соотношением

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0,$$

а ее частные производные по координатам совпадают с импульсами. Заменив в соответствии с этим импульсы p в функции Гамильтона производными $\partial S/\partial q$, мы получим уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0, \qquad (47,1)$$

которому должна удовлетворять функция $S(q, t)$. Это уравнение в частных производных первого порядка; оно называется *уравнением Гамильтона — Якоби*.

Наряду с уравнениями Лагранжа и каноническими уравнениями уравнение Гамильтона — Якоби также является основой некоторого общего метода интегрирования уравнений движения.

Переходя к изложению этого метода, напомним предварительно, что всякое дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка имеет решение, зависящее от произвольной функции; такое решение называют общим интегралом уравнения. В механических применениях, однако, основную роль играет не общий интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, а так называемый *полный интеграл*; так называется решение дифференциального уравнения в частных производных, содержащее столько независимых произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных.

В уравнении Гамильтона — Якоби независимыми переменными являются время и координаты. Поэтому для системы с