Совершенно аналогичным образом можно доказать инвариантность интегралов

$$\iint \sum_i dq_i\, dp_i,$$

$$\iiiint \sum_{i \neq k} dq_i\, dp_i\, dq_k\, dp_k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

в которых интегрирование производится по заданным двух-, четырех- и т. д. -мерным многообразиям в фазовом пространстве.

§ 47. Уравнение Гамильтона — Якоби

В § 43 было введено понятие о действии как функции координат и времени. Было показано, что частная производная по времени от этой функции $S(q, t)$ связана с функцией Гамильтона соотношением

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0,$$

а ее частные производные по координатам совпадают с импульсами. Заменив в соответствии с этим импульсы p в функции Гамильтона производными $\partial S/\partial q$, мы получим уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0, \qquad (47,1)$$

которому должна удовлетворять функция $S(q, t)$. Это уравнение в частных производных первого порядка; оно называется *уравнением Гамильтона — Якоби*.

Наряду с уравнениями Лагранжа и каноническими уравнениями уравнение Гамильтона — Якоби также является основой некоторого общего метода интегрирования уравнений движения.

Переходя к изложению этого метода, напомним предварительно, что всякое дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка имеет решение, зависящее от произвольной функции; такое решение называют общим интегралом уравнения. В механических применениях, однако, основную роль играет не общий интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, а так называемый *полный интеграл*; так называется решение дифференциального уравнения в частных производных, содержащее столько независимых произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных.

В уравнении Гамильтона — Якоби независимыми переменными являются время и координаты. Поэтому для системы с

s степенями свободы полный интеграл этого уравнения должен содержать $s+1$ произвольных постоянных. При этом, поскольку функция S входит в уравнение только через свои производные, то одна из произвольных постоянных содержится в полном интеграле аддитивным образом, т. е. полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби имеет вид

$$S = f(t, q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) + A, \tag{47,2}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и A — произвольные постоянные [1]).

Выясним теперь связь между полным интегралом уравнения Гамильтона — Якоби и интересующим нас решением уравнений движения. Для этого произведем каноническое преобразование от величин q, p к новым переменным, причем функцию $f(t, q, \alpha)$ выберем в качестве производящей функции, а величины α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — в качестве новых импульсов. Новые координаты обозначим посредством $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$. Так как производящая функция зависит от старых координат и новых импульсов, мы должны пользоваться формулами (45,8):

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \qquad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Но поскольку функция f удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби, то мы видим, что новая функция Гамильтона обращается тождественно в нуль:

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Поэтому канонические уравнения для новых переменных имеют вид $\dot{\alpha}_i = 0$, $\dot{\beta}_i = 0$, откуда следует, что

$$\alpha_i = \text{const}, \qquad \beta_i = \text{const}. \tag{47,3}$$

---

[1]) Хотя общий интеграл уравнения Гамильтона — Якоби нам не понадобится, но укажем, что он может быть найден, если известен полный интеграл. Для этого будем считать величину A произвольной функцией остальных постоянных:

$$S = f(t, q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) + A(\alpha_1, \ldots, \alpha_s).$$

Заменив здесь величины α_i функциями координат и времени, которые находим из s условий

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0,$$

получим общий интеграл, зависящий от вида произвольной функции $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$. Действительно, для полученной таким способом функции S имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha + \sum_k \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\right)_q \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha.$$

Но величины $(\partial S/\partial q_i)_\alpha$ удовлетворяют уравнению Гамильтона — Якоби, поскольку функция $S(t, q; \alpha)$ есть по предположению полный интеграл этого уравнения. Поэтому удовлетворяют ему и производные $\partial S/\partial q_i$.

С другой стороны, s уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

дают возможность выразить s координат q через время и $2s$ постоянных α и β. Тем самым мы найдем общий интеграл уравнений движения.

Таким образом, решение задачи о движении механической системы методом Гамильтона — Якоби сводится к следующим операциям.

По функции Гамильтона составляется уравнение Гамильтона — Якоби и находится полный интеграл (47,2) этого уравнения. Дифференцируя его по произвольным постоянным α и приравнивая новым постоянным β, получаем систему s алгебраических уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \tag{47,4}$$

решая которую, найдем координаты q как функции времени и $2s$ произвольных постоянных. Зависимость импульсов от времени можно найти затем по уравнениям $p_i = \partial S/\partial q_i$.

Если мы имеем неполный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, зависящий от меньшего чем s числа произвольных постоянных, то хотя с его помощью нельзя найти общий интеграл уравнений движения, но можно несколько упростить задачу его нахождения. Так, если известна функция S, содержащая одну произвольную постоянную α, то соотношение

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \text{const}$$

дает одно уравнение, связывающее $q_1, \ldots, q_s$ и t.

Уравнение Гамильтона — Якоби принимает несколько более простую форму в том случае, когда функция H не зависит от времени явно, т. е. система консервативна. Зависимость действия от времени сводится при этом к слагаемому $-Et$:

$$S = S_0(q) - Et \tag{47,5}$$

(см. § 44), и подстановкой в (47,1) мы получаем для укороченного действия $S_0(q)$ уравнение Гамильтона — Якоби в виде

$$H\left(q_1, \ldots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E. \tag{47,6}$$

§ 48. Разделение переменных

В ряде важных случаев нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби может быть достигнуто методом так называемого *разделения переменных*, сущность которого состоит в следующем.