С другой стороны, $s$ уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

дают возможность выразить $s$ координат $q$ через время и $2s$ постоянных $\alpha$ и $\beta$. Тем самым мы найдем общий интеграл уравнений движения.

Таким образом, решение задачи о движении механической системы методом Гамильтона — Якоби сводится к следующим операциям.

По функции Гамильтона составляется уравнение Гамильтона — Якоби и находится полный интеграл (47,2) этого уравнения. Дифференцируя его по произвольным постоянным $\alpha$ и приравнивая новым постоянным $\beta$, получаем систему $s$ алгебраических уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \tag{47,4}$$

решая которую, найдем координаты $q$ как функции времени и $2s$ произвольных постоянных. Зависимость импульсов от времени можно найти затем по уравнениям $p_i = \partial S/\partial q_i$.

Если мы имеем неполный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, зависящий от меньшего чем $s$ числа произвольных постоянных, то хотя с его помощью нельзя найти общий интеграл уравнений движения, но можно несколько упростить задачу его нахождения. Так, если известна функция $S$, содержащая одну произвольную постоянную $\alpha$, то соотношение

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \text{const}$$

дает одно уравнение, связывающее $q_1, \ldots, q_s$ и $t$.

Уравнение Гамильтона — Якоби принимает несколько более простую форму в том случае, когда функция $H$ не зависит от времени явно, т. е. система консервативна. Зависимость действия от времени сводится при этом к слагаемому $-Et$:

$$S = S_0(q) - Et \tag{47,5}$$

(см. § 44), и подстановкой в (47,1) мы получаем для укороченного действия $S_0(q)$ уравнение Гамильтона — Якоби в виде

$$H\left(q_1, \ldots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E. \tag{47,6}$$

## § 48. Разделение переменных

В ряде важных случаев нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби может быть достигнуто методом так называемого *разделения переменных*, сущность которого состоит в следующем.

Допустим, что какая-либо координата — обозначим ее $q_1$ — и соответствующая ей производная $\partial S/\partial q_1$ входят в уравнение Гамильтона — Якоби только в виде некоторой комбинации $\varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$, не содержащей никаких других координат (или времени) и производных, т. е. уравнение имеет вид

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\}=0, \tag{48,1}$$

где $q_i$ обозначает совокупность всех координат за исключением $q_1$.

Будем искать в этом случае решение в виде суммы

$$S=S'(q_i, t)+S_1(q_1). \tag{48,2}$$

Подставив это выражение в уравнение (48,1), получим:

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right)\right\}=0. \tag{48,3}$$

Предположим, что решение (48,2) найдено. Тогда после подстановки его в уравнение (48,3) последнее должно обратиться в тождество, справедливое, в частности, при любом значении координаты $q_1$. Но при изменении $q_1$ может меняться только функция $\varphi$; поэтому тождественность равенства (48,3) требует, чтобы и функция $\varphi$ сама по себе была постоянной. Таким образом, уравнение (48,3) распадается на два уравнения:

$$\varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right)=\alpha_1, \tag{48,4}$$

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_1\right\}=0, \tag{48,5}$$

где $\alpha_1$ — произвольная постоянная. Первое из них есть обыкновенное дифференциальное уравнение, из которого функция $S_1(q_1)$ может быть определена простым интегрированием. После этого остается дифференциальное уравнение в частных производных (48,5), но уже с меньшим числом независимых переменных.

Если таким способом можно последовательно отделить все $s$ координат и время, то нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби целиком сводится к квадратурам. Для консервативной системы речь фактически идет лишь о разделении $s$ переменных (координат) в уравнении (47,6), и при полном разделении искомый интеграл уравнения имеет вид

$$S=\sum_k S_k(q_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_s)-E(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)t, \tag{48,6}$$

где каждая из функций $S_k$ зависит лишь от одной из координат, а энергия $E$ как функция произвольных постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ получается подстановкой $S_0=\sum S_k$ в уравнение (47,6).

Частным случаем разделения является случай циклической переменной. Циклическая координата $q_1$ вовсе не входит в явном виде в функцию Гамильтона, а потому и в уравнение Гамильтона — Якоби. Функция $\varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$ сводится при этом просто к $\partial S/\partial q_1$, и из уравнения (48,4) имеем просто $S_1 = \alpha_1 q_1$, так что

$$S = S'(q_i, t) + \alpha_1 q_1. \tag{48,7}$$

Постоянная $\alpha_1$ есть при этом не что иное, как постоянное значение импульса $p_1 = \partial S/\partial q_1$, отвечающего циклической координате. Отметим, что отделение времени в виде члена $-Et$ для консервативной системы тоже соответствует методу разделения переменных для «циклической переменной» $t$.

Таким образом, все рассматривавшиеся ранее случаи упрощения интегрирования уравнений движения, основанные на использовании циклических переменных, охватываются методом разделения переменных в уравнении Гамильтона — Якоби. К ним добавляется еще ряд случаев, когда разделение переменных возможно, хотя координаты не являются циклическими. Все это приводит к тому, что метод Гамильтона — Якоби является наиболее могущественным методом нахождения общего интеграла уравнений движения.

Для разделения переменных в уравнении Гамильтона — Якоби существен удачный выбор координат. Рассмотрим некоторые примеры разделения переменных в различных координатах, которые могут представить физический интерес в связи с задачами о движении материальной точки в различных внешних полях.

**1. Сферические координаты.** В этих координатах ($r$, $\theta$, $\varphi$) функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + U(r, \theta, \varphi)$$

и разделение переменных возможно, если

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2\sin^2\theta},$$

где $a(r)$, $b(\theta)$, $c(\varphi)$ — произвольные функции. Последний член в этом выражении вряд ли может представить физический интерес, и потому мы рассмотрим поле вида

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2}. \tag{48,8}$$

В этом случае уравнение Гамильтона—Якоби для функции $S_0$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial\theta}\right)^2 + 2mb(\theta)\right] + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}\right)^2 = E.$$

Учитывая цикличность координаты $\varphi$, ищем решение в виде

$$S_0 = p_\varphi \varphi + S_1(r) + S_2(\theta)$$

и для функций $S_1(r)$ и $S_2(\theta)$ получаем уравнения

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \beta,$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} = E.$$

Интегрируя их, получим окончательно:

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta + \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}}\, dr. \quad (48,9)$$

Произвольными постоянными здесь являются $p_\varphi$, $\beta$, $E$; дифференцируя по ним и приравнивая результат дифференцирования новым постоянным, найдем общее решение уравнений движения.

**2. Параболические координаты.** Переход к параболическим координатам $\xi$, $\eta$, $\varphi$ совершается от цилиндрических координат (которые в этом параграфе мы будем обозначать, как $\rho$, $\varphi$, $z$) по формулам

$$z = {}^1/_2(\xi - \eta), \quad \rho = \sqrt{\xi\eta}. \quad (48,10)$$

Координаты $\xi$ и $\eta$ пробегают значения от нуля до $\infty$; поверхности постоянных $\xi$ и $\eta$ представляют собой, как легко убедиться, два семейства параболоидов вращения (с осью $z$ в качестве оси симметрии). Связь (48,10) можно представить еще и в другой форме, введя радиус

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = {}^1/_2(\xi + \eta). \quad (48,11)$$

Тогда

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z. \quad (48,12)$$

Составим функцию Лагранжа материальной точки в координатах $\xi$, $\eta$, $\varphi$. Дифференцируя выражения (48,10) по времени и подставляя в

$$L = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - U(\rho, \varphi, z)$$

(функция Лагранжа в цилиндрических координатах), получим:

$$L = \frac{m}{8}(\xi + \eta)\left(\frac{\dot\xi^2}{\xi} + \frac{\dot\eta^2}{\eta}\right) + \frac{m}{2}\xi\eta\dot\varphi^2 - U(\xi, \eta, \varphi). \quad (48,13)$$

Импульсы равны

$$p_\xi = \frac{m}{4\xi}(\xi+\eta)\dot{\xi}, \qquad p_\eta = \frac{m}{4\eta}(\xi+\eta)\dot{\eta}, \qquad p_\varphi = m\xi\eta\dot{\varphi}$$

и функция Гамильтона

$$H = \frac{2}{m}\frac{\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2}{\xi+\eta} + \frac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta} + U(\xi, \eta, \varphi). \tag{48,14}$$

Физически интересные случаи разделения переменных в этих координатах соответствуют потенциальной энергии вида

$$U = \frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta} = \frac{a(r+z)+b(r-z)}{2r}. \tag{48,15}$$

Имеем уравнение

$$\frac{2}{m(\xi+\eta)}\left[\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial \xi}\right)^2 + \eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial \xi}\right)^2\right] + \frac{1}{2m\xi\eta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta} = E.$$

Циклическая координата $\varphi$ отделяется в виде $p_\varphi \varphi$. Умножив затем уравнение на $m(\xi+\eta)$ и перегруппировав члены, получим:

$$2\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial \xi}\right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} + 2\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial \eta}\right)^2 + \\ + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = 0.$$

Положив

$$S_0 = p_\varphi \varphi + S_1(\xi) + S_2(\eta),$$

получим два уравнения

$$2\xi\left(\frac{dS_1}{d\xi}\right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} = \beta,$$

$$2\eta\left(\frac{dS_2}{d\eta}\right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = -\beta$$

и, интегрируя их, найдем окончательно:

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \\ + \int\sqrt{\frac{mE}{2} + \frac{\beta}{2\xi} - \frac{ma(\xi)}{2\xi} - \frac{p_\varphi^2}{4\xi^2}}\,d\xi + \int\sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{\beta}{2\eta} - \frac{mb(\eta)}{2\eta} - \frac{p_\varphi^2}{4\eta^2}}\,d\eta \tag{48,16}$$

с произвольными постоянными $p_\varphi$, $\beta$, $E$.

3. **Эллиптические координаты.** Эти координаты $\xi$, $\eta$, $\varphi$ вводятся согласно формулам

$$\rho = \sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}, \qquad z = \sigma\xi\eta. \tag{48,17}$$

Постоянная $\sigma$ является параметром преобразования. Координата $\xi$ пробегает значения от единицы до $\infty$, а координата $\eta$ от $-1$ до $+1$. Геометрически более наглядные соотношения получаются, если ввести расстояния $r_1$ и $r_2$ до точек $A_1$ и $A_2$ на оси $z$ с координатами $z=\sigma$ и $z=-\sigma$ [1]): $r_1=\sqrt{(z-\sigma)^2+\rho^2}$, $r_2=\sqrt{(z+\sigma)^2+\rho^2}$.

Подставив сюда выражения (48,17), получим:

$$r_1=\sigma(\xi-\eta), \qquad r_2=\sigma(\xi+\eta),$$
$$\xi=\frac{r_2+r_1}{2\sigma}, \qquad \eta=\frac{r_2-r_1}{2\sigma}. \tag{48,18}$$

Преобразуя функцию Лагранжа от цилиндрических координат к эллиптическим, найдем:

$$L=\frac{m\sigma^2}{2}(\xi^2-\eta^2)\left(\frac{\dot\xi^2}{\xi^2-1}+\frac{\dot\eta^2}{1-\eta^2}\right)+$$
$$+\frac{m\sigma^2}{2}(\xi^2-1)(1-\eta^2)\dot\varphi^2-U(\xi,\eta,\varphi). \tag{48,19}$$

Отсюда для функции Гамильтона получим:

$$H=\frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)}\left[(\xi^2-1)p_\xi^2+(1-\eta^2)p_\eta^2+\left(\frac{1}{\xi^2-1}+\frac{1}{1-\eta^2}\right)p_\varphi^2\right]+$$
$$+U(\xi,\eta,\varphi). \tag{48,20}$$

Физически интересные случаи разделения переменных соответствуют потенциальной энергии

$$U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi^2-\eta^2}=\frac{\sigma^2}{r_1r_2}\left\{a\left(\frac{r_2+r_1}{2\sigma}\right)+b\left(\frac{r_2-r_1}{2\sigma}\right)\right\}, \tag{48,21}$$

где $a(\xi)$ и $b(\eta)$ — произвольные функции. Результат разделения переменных в уравнении Гамильтона — Якоби гласит:

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+\int\sqrt{2m\sigma^2E+\frac{\beta-2m\sigma^2a(\xi)}{\xi^2-1}-\frac{p_\varphi^2}{(\xi^2-1)^2}}\,d\xi+$$
$$+\int\sqrt{2m\sigma^2E-\frac{\beta+2m\sigma^2b(\eta)}{1-\eta^2}-\frac{p_\varphi^2}{(1-\eta^2)^2}}\,d\eta. \tag{48,22}$$

---

[1]) Линии постоянных $\xi$ представляют собой семейство эллипсоидов

$$\frac{z^2}{\sigma^2\xi^2}+\frac{\rho^2}{\sigma^2(\xi^2-1)}=1$$

с фокусами в точках $A_1$ и $A_2$, а линии постоянных $\eta$ — семейство софокусных с ними гиперболоидов

$$\frac{z^2}{\sigma^2\eta^2}-\frac{\rho^2}{\sigma^2(1-\eta^2)}=1.$$

**Задачи**

1. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби для движения частицы в поле

$$U = \frac{\alpha}{r} - Fz$$

(наложение кулоновского и однородного полей); найти специфическую для такого движения сохраняющуюся функцию координат и импульсов.

Решение. Данное поле относится к типу (48,15), причем

$$a(\xi) = \alpha - \frac{F}{2}\xi^2, \qquad b(\eta) = \alpha + \frac{F}{2}\eta^2.$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби дается формулой (48,16) с этими функциями $a(\xi)$ и $b(\eta)$.

Для выяснения смысла постоянной $\beta$ пишем уравнения

$$2\xi p_\xi^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} = \beta,$$

$$2\eta p_\eta^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = -\beta.$$

Вычтя одно из этих уравнений из другого и выразив импульсы $p_\xi = \partial S/\partial\xi$ и $p_\eta = \partial S/\partial\eta$ через импульсы $p_\rho = \partial S/\partial\rho$ и $p_z = \partial S/\partial z$ в цилиндрических координатах, получим после простого приведения:

$$\beta = -m\left[\frac{\alpha z}{r} + \frac{p_\rho}{m}(zp_\rho - \rho p_z) + \frac{p_\varphi^2}{m\rho^2}z\right] - \frac{m}{2}F\rho^2.$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой интеграл движения, специфический для чисто кулоновского поля ($z$-компонента вектора (15,17)).

2. То же в поле

$$U = \frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2}$$

(кулоновское поле двух неподвижных центров на расстоянии $2\sigma$ друг от друга).

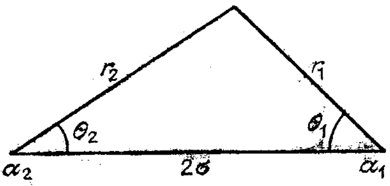

Рис. 55

Решение. Данное поле относится к типу (48,21), причем

$$a(\xi) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sigma}\xi, \qquad b(\eta) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sigma}\eta.$$

Действие $S(\xi, \eta; \varphi, t)$ получается подстановкой этих выражений в (48,22). Смысл постоянной $\beta$ выясняется аналогично тому, как это было сделано в задаче 1; она выражает собой в данном случае сохранение следующей величины:

$$\beta = \sigma^2\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right) - M^2 + 2m\sigma(\alpha_1\cos\theta_1 + \alpha_2\cos\theta_2),$$

где

$$M^2 = [\mathbf{rp}]^2 = p_\rho^2 z^2 + p_z^2\rho^2 + \frac{r^2 p_\varphi^2}{\rho^2} - 2z\rho p_z p_\rho,$$

а $\theta_1$ и $\theta_2$ — углы, указанные на рис. 55.